Algoritmo Universale per il calcolo delle Effemeridi di un Corpo del Sistema Solare

Giuseppe Matarazzo*

Marzo 1997

Sommario

Mediante l'uso delle *Variabili Universali* si perviene alla risoluzione dell' equazione di Keplero generalizzata e all'algoritmo che risolve la generica *conica* e permette di calcolare le coordinate celesti e la velocità di un corpo sottoposto alla gravitazione del Sole.

1 Introduzione

Scopo di questo lavoro è quello di ricercare un *metodo generale* per il calcolo della posizione di un astro, essendo noti i parametri orbitali del suo moto imperturbato attorno al Sole. E' un problema che è stato risolto sin dai tempi di Keplero e Newton e che nella divulgazione scientifica viene sempre spezzettato in 3 parti, a seconda del tipo di traiettoria conica descritta dal corpo: *ellisse o parabola o iperbole.* Ciò è dovuto alla necessità di risolvere 3 differenti equazioni trascendenti, vale a dire: la classica, e sempre elegante, equazione di Keplero ($E - e\sin E = M$) per il moto ellittico, quella di Barker ($D^3 + 6\mu q D = 6\mu^2\tau$) per il parabolico e un'altra, riconducibile alla prima, per il moto iperbolico ($e\sinh F - F = M$).

Poichè l'equazione differenziale del moto ($\mathbf{r}'' + \mu\mathbf{r}/r^3 = 0$) è **unica** ed unica è pure la traiettoria conica risultante, è possibile adottare un **solo** algoritmo per il calcolo delle effemeridi, senza essere obbligati a precisare il tipo di curva in esame.

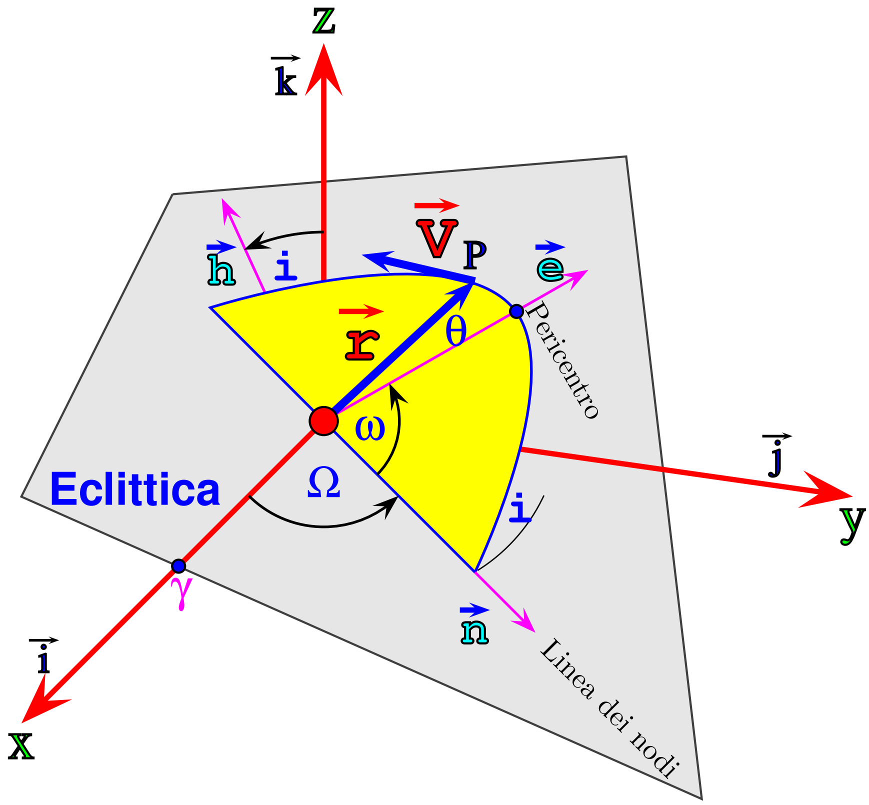
Ci accingiamo a farlo utilizzando il metodo delle *Variabili Universali*, in cui si introduce il concetto di *anomalia eccentrica generalizzata.*

2 Analisi del problema

Per definire un'orbita ellittica o iperbolica sono necessari *6 parametri*, e cioè i 3 angoli di Eulero (i, Ω, ω), il semiasse maggiore e l'eccentricità (a, e) e quindi l'anomalia media M del corpo al tempo t, mentre per una traiettoria parabolica gli **elementi orbitali** si riducono a 5, essendo sempre costante l'eccentricità ($e = 1$); in questo caso è consuetudine introdurre, oltre agli angoli euleriani, l'epoca del passaggio del corpo al perielio (T_p) e la sua distanza (q).

Il primo passo da effettuare è quello di rendere uniforme, cioè applicabile universalmente, l'insieme dei sei parametri orbitali. Per esempio gli elementi a, e non possono essere presi in considerazione perchè la distanza perielica, calcolata tramite la nota formula $q = a(1 - e)$, risulterebbe infinitamente grande nelle orbite paraboliche; stesso discorso si può fare per M che ha un valore definito nelle orbite ellittiche e iperboliche, ma è nulla in quelle paraboliche. Invece, gli angoli di giacitura della curva (i, Ω, ω) presentano senza dubbio i caratteri dell'universalità applicativa.

*Ingegnere e Astrofilo, Canicattini Bagni (Siracusa) - Italy



Stabilendo *per convenzione* che il semiasse a della conica sia *negativo* per le orbite iperboliche e *positivo* per quelle ellittiche, troviamo il primo parametro valido per le 3 curve, e cioè la distanza perielica. Difatti la formula $q = a(1-e)$ 'copre' le traiettorie ellittiche ed iperboliche e q è un parametro assegnato per quelle paraboliche. La seconda grandezza di applicabilità generale è la **costante energetica** del moto ($\alpha = \frac{-\mu}{a}$), che ha sempre un valore definito, anche nelle curve paraboliche quando $a \to \infty$ ed $\alpha = 0$. L'ultimo parametro da individuare è quello temporale, e cioè ($\tau = t - T_p$), che è noto nelle orbite paraboliche e facilmente calcolabile nelle altre con la seguente formula:

$$\tau = t - T_p = \frac{M}{n} \tag{1}$$

essendo M l'anomalia media espressa in gradi, $n = \frac{K_{gauss} \cdot 180/\pi}{|a|^{\frac{3}{2}}}$ il moto medio del corpo in gradi/giorno e K_{gauss} la costante di Gauss. Il tempo τ sarà quindi espresso in giorni giuliani.

Adottiamo come unità di misura quelle *canoniche*, in cui il parametro gravitazionale è unitario ($\mu = 1$), le lunghezze sono misurate in unità astronomiche ($1\,UA = 149\,597\,870$ km), i tempi in UT_0 (cioè giorni moltiplicati per la costante $K_{gauss} = 0.017\,202\,098\,95$) e le velocità in UA/UT_0, la cui unità equivale a 29.78469 km/s

Riepilogando i **6 elementi orbitali universali** sono:

$$q, \quad \alpha = -1/a, \quad \tau = K_{gauss} \cdot (t - T_p), \quad i, \quad \Omega, \quad \omega \tag{2}$$

Facendo riferimento al *Sistema di Coordinate Eclittiche*, ci calcoliamo innanzitutto le componenti dei *Versori Perifocali* (**P**,**Q**); come mostrato in figura, il primo di questi vettori unitari (**P**) è diretto dal centro gravitazionale (Sole) al perielio orbitale, mentre **Q** è normale ad esso e giace nel piano dell'orbita.

(3)

$$
\begin{array}{ll}
P_x = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\cos i\sin\Omega & Q_x = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\cos i\sin\Omega \\
P_y = \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos i\cos\Omega & Q_y = -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos i\cos\Omega \\
P_z = \sin\omega\sin i & Q_z = +\cos\omega\sin i
\end{array}
$$

Dall'equazione del moto centrale si ricava il valore della *velocità orbitale*:

$$V = \sqrt{\frac{2}{r} + \alpha} \quad \textit{e al perielio} \quad V_p = \sqrt{\frac{2}{q} + \alpha} \tag{4}$$

A questo punto possiamo calcolare i vettori Posizione e Velocità del corpo al *perielio*:

$$\vec{r_p} = q \cdot \vec{P} \qquad \vec{V_p} = V_p \cdot \vec{Q} \tag{5}$$

Esplicitando le componenti si ottiene:

$$
\begin{array}{ll}
x_p = q \cdot P_x & Vx_p = V_p \cdot Q_x \\
y_p = q \cdot P_y & Vy_p = V_p \cdot Q_y \\
z_p = q \cdot P_z & Vz_p = V_p \cdot Q_z
\end{array}
\tag{6}
$$

Siamo cosi̇̀ passati dai sei parametri iniziali a queste sei grandezze, che ci consentono di determinare il *vettore posizione* $\vec{r}$ dell'astro al tempo t e quindi le sue coordinate *polari geocentriche* (AR, δ), essendo note quelle del Sole Apparente.

3 Le Variabili Universali

L'equazione trascendente di Keplero viene cosi̇̀ definita:

$$\tau = r_0 S_1 + \sigma_0 S_2 + \mu S_3 = q S_1 + S_3 \tag{7}$$

essendo noti il *raggio vettore iniziale* $r_0 \equiv q$ e il prodotto scalare $\sigma_0 = \vec{r}_0 \cdot \vec{V}_0$; quest'ultimo è *nullo* perchè al perielio i due vettori sono perpendicolari.

Il raggio vettore r al tempo t è determinato dall'equazione:

$$r = r_0 S_0 + \sigma_0 S_1 + \mu S_2 = q S_0 + S_2 \tag{8}$$

essendo (S_0, S_1, S_2, S_3) le **Funzioni Coniche Generalizzate** definite mediante uno sviluppo in serie polinomiale avente come variabile il parametro

$$\beta = \alpha \cdot \psi^2 \tag{9}$$

con α uguale alla costante energetica del moto (nota) e ψ chiamata **anomalia eccentrica generalizzata** e definita dalla trasformazione di Sundman $(d\psi = d\tau / r)$

La *formula ricorsiva* delle funzioni coniche S_n è la seguente:

$$S_n = \psi^n \cdot \left(\frac{1}{n!} + \frac{\beta}{(n+2)!} + \frac{\beta^2}{(n+4)!} + \frac{\beta^3}{(n+6)!} + \ldots + \frac{\beta^k}{(2k+n)!} \right) \tag{10}$$

legate tra loro dalla relazione $S_n = \frac{\psi^n}{n!} + \alpha S_{n+2}$ per cui basta definire il solo sviluppo di S_3 e S_2 per avere anche S_1 e S_0, vale a dire $S_1 = \psi + \alpha S_3$ e $S_0 = 1 + \alpha S_2$.

Lo sviluppo polinomiale di S_3 e S_2 è riportato in forma *nidificata* nell'Appendice (‘).

Per risolvere la (7) si comincia a definire un valore iniziale approssimato dell'anomalia eccentrica ψ, cioè $\psi_a = \frac{\tau}{r_0} = \frac{\tau}{q}$ e quindi, tramite l'algoritmo iterativo di Newton, si determina per successive approssimazioni:

$$\psi = \psi_a - \frac{F(\psi_a)}{F'(\psi_a)} \tag{11}$$

fino alla precisione voluta $|\psi - \psi_a| < \epsilon$. Si può porre $\epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$. L'espressione $F(\psi_a)$ è l'equazione di Keplero (7), ossia $qS_1 + S_3 - \tau$ mentre $F'(\psi_a)$ è il raggio vettore (8) uguale a $qS_0 + S_2$

Con l'ultima iterazione si conosce il valore finale dell'anomalia eccentrica ψ e le corrispondenti funzioni coniche S_0, S_1, S_2, S_3. Queste consentono di calcolare i parametri lagrangiani **f** e **g** che definiscono il vettore posizione del corpo.

$$f = 1 - \frac{\mu S_2}{r_0} = 1 - \mu\frac{S_2}{q} \qquad g = \tau - \mu S_3 = \tau - S_3 \tag{12}$$

Per determinare il vettore velocità serve conoscere gli altri due parametri **f'** e **g'** che valgono:

$$f' = -\frac{\mu S_1}{r r_0} = -\frac{S_1}{rq} \qquad g' = 1 - \frac{\mu S_2}{r} = 1 - \frac{S_2}{r} \tag{13}$$

Pertanto i due vettori posizione e velocità al tempo t sono:

$$\vec{r} = f \cdot \vec{r}_p + g \cdot \vec{V}_p \qquad \vec{V} = f' \cdot \vec{r}_p + g' \cdot \vec{V}_p \tag{14}$$

E possiamo scriverne le componenti in forma esplicita:

$$\begin{array}{ll} x = f x_p + g V x_p & V_x = f' x_p + g' V x_p \\ y = f y_p + g V y_p & V_y = f' y_p + g' V y_p \\ z = f z_p + g V z_p & V_z = f' z_p + g' V z_p \\ & \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & V = \sqrt{V x^2 + V y^2 + V z^2} \end{array}$$

Conviene adottare un accorgimento particolare nel caso di *orbite ellittiche multiple*, quando l'intervallo di tempo τ supera più volte il periodo di rivoluzione dell'astro; si potrebbero verificare errori di arrotondamento nelle funzioni coniche (10). Il procedimento da usare è descritto nell'Appendice (").

4 Calcolo delle effemeridi

A causa del fenomeno della precessione degli equinozi, i parametri (i, Ω, ω) e l'obliquità dell'eclittica ϵ devono essere riferiti ad un'Equinozio Standard; per J2000 $\equiv$ 1.5/1/2000 $\epsilon = 23.4392911°$. Si può passare quindi dalle coordinate *eclittiche* del corpo al tempo t a quelle *equatoriali* usando le note formule:

$$\begin{aligned} x_{eq} &= x \\ y_{eq} &= y \cos\epsilon - z \sin\epsilon \\ z_{eq} &= y \sin\epsilon + z \cos\epsilon \end{aligned} \tag{15}$$

Per determinare le coordinate geocentriche polari (AR, δ) basta conoscere le *coordinate equatoriali geocentriche* del Sole all'equinozio di riferimento (x_s, y_s, z_s), generalmente tabulate su file in formato ASCII o facilmente calcolabili. Le formule da applicare sono le seguenti:

$$\begin{array}{ll} x_{geo} = x_{eq} + x_s & AR = \arctan\left(\frac{y_{geo}}{x_{geo}}\right) \\ y_{geo} = y_{eq} + y_s & (\textit{nel corretto quadrante}) \\ z_{geo} = z_{eq} + z_s & \delta = \arcsin\left(\frac{z_{geo}}{r_{geo}}\right) \\ r_{geo} = \sqrt{x_{geo}^2 + y_{geo}^2 + z_{geo}^2} & \end{array}$$

5 Esempi

Come traccia di calcolo può essere di valido ausilio il listato in BASIC dell'Appendice (“‘), dove i dati degli esempi che seguono sono memorizzati nelle sestuple $(\alpha, q, i, \Omega, \omega, \tau)$

```
1) ASTEROIDE     1994 WR12 tipo 'Earth Crossing'
                 (Shoemaker - M.Palomar USA)
   Elementi:
   Epoca 2449680.5 (24/11/1994)      M=125.38215
   a=0.7566560; e=0.3978305;        |om=205.67520
                              (J2000)|Om= 63.07572
                                     | i=  6.87631

               EFFEMERIDI alla data 25.0/11/1994
               =================================
   Vettori Perifocali
            -0.02457755           0.99398222
       P    -0.89533511      Q    0.02561554
            -0.44471450          -0.10650442
   Vettori Posizione e Velocit PERIELIO
            -0.011198             1.740994      q=0.45563517 UA
      rp    -0.407946        Vp   0.044866     Vp=1.7515=52.17 km/s
            -0.202628            -0.186646
   Coordinate Equatoriali Geoc. del SOLE (J2000)
            -0.455025    -0.803712    -0.348463
   Giorno Giuliano del Passaggio al Perielio: 2449596.77033
   Vettore Posizione del Pianetino al 25/11/1994
                     0.45452602
     Coord. Elioc.   0.80842216   r=0.99115851 UA
                     0.34964970

                    -0.00049876   rgeo=0.00488284 UA =730500 km=
     Coord. Geoc.    0.00471016   circa 2 volte la distanza
                     0.00118654   Terra-Luna (Earth Crossing)

     AR = 06h  24m 10.69s
     De = 14gr 03' 47.9''


2) COMETA     C/1996 B2 (HYAKUTAKE) - Traiettoria Parabolica
   Elementi:
   q=0.2243260; T=1996 maggio 2.769=        |om=131.202
                 =2450206.269        (J2000)|Om=188.943
                                            | i=122.639

               EFFEMERIDI alla data 27.0/3/1996
               ================================
```

```
Vettori Perifocali
          0.58762598          0.79847350
    P     0.20971234      Q    0.00595889
          0.78148349         -0.60200047
Vettori Posizione e Velocit PERIELIO
          0.131816            2.384194
   rp     0.047043        Vp   0.017793     Vp=2.9859
          0.175302           -1.797537     = 88.93 km/s
Coordinate Equatoriali Geoc. del SOLE (J2000)
          0.991162     0.106247     0.046066

Vettore Posizione della Cometa al 27/3/1996
                 -1.02901220
  Coord. Elioc.  -0.12877790   r=1.03862384 UA
                  0.05361185

                 -0.03784989
  Coord. Geoc.   -0.02253041   rgeo=0.10897646 UA
                  0.09967765

  AR =  14h  03m 03.24s
  De =  66gr 09' 32.8''
```

6 Conclusioni

Spero che queste note abbiano un favorevole *impatto* sugli appassionati di astronomia, in quanto ritengo che il *Metodo delle Variabili Universali* non sia sufficientemente divulgato al di fuori dell'ambito astrodinamico, dove trova applicazione nelle correzioni d'orbita (*problema di Lambert*). Gli algoritmi, all'apparenza complessi, sono di elementare applicazione nei programmi computerizzati ed arrivano a precisioni migliori di quelli tradizionali proprio nelle condizioni più *estremizzate*, cioè nello studio di orbite ad eccentricità prossime, per difetto o per eccesso, all'unità. *(02 Mar.1997)*

Riferimenti bibliografici

[1] R.H. GOODING, **On Universal Elements and Conversion Procedures To and From Position and Velocity** - Celestial Mechanics 44, 1988. p.283-298, Elementi Universali dell'orbita $(\alpha, q, i, \Omega, \omega, \tau)$

[2] E. EVERHART, E.T. PITKIN **Universal Variables in the Two-Body Problem** - American Association of Physics Teachers - Ago.1983 - p.712-717

[3] E.T. PITKIN **A Regularized Approach to Universal Orbit Variables** - A.A.I.A. Journal Vol3 - Ago. 1965 - p.1508, Riduzione Orbite multiple


```
                          A P P E N D I C E
                          -----------------

(') Sviluppo Polinomiale delle FUNZIONI CONICHE Generalizzate
    ==========================================================
```

```
    (Schema di HORNER nidificato per applicazioni al computer)
                     al = alfa; be= beta

      La variabile be e' spinta fino all'ottavo grado

      s3parz = ((((be/342+1)*be/272+1)*be/210+1)*be/156+1)
S3 = Psi^3/6 * ((((s3parz *be/110+1)*be/72+1)*be/42+1)*be/20+1)

     s2parz = ((((be/306+1)*be/240+1)*be/182+1)*be/132+1)
S2 = Psi^2/2 * ((((s2parz *be/90+1)*be/56+1)*be/30+1)*be/12+1)
S1 = Psi+al*S3
S0 = 1+al*S2
```

(``)ROUTINE in BASIC per la riduzione dell'anomalia eccentrica generalizzata ad una RIVOLUZIONE, nell'ambito delle orbite chiuse (ELLITTICHE)

Serve a sfruttare meglio l'approssimazione di S3 ed S2, eliminando i Round-Off Errors.

```
 deltat# = tau# * kgauss#
 psia# = deltat# / q#:  ' Valore iniziale di psi
 sg = Sgn(deltat#):  'Segno di dt per considerare Tempi NEGATIVI
              'Caso di RIVOLUZIONI multiple in Orbite Ellittiche
 If alfa# < 0 Then
    psir# = 2 * pi# * (-alfa#) ^ -.5
    tr# = 2 * pi# * mu# * (-alfa#) ^ -1.5
    deltat# = MODU(deltat#, tr#): 'Funzione Modulo
      psia# = MODU(psia#, psir#): 'Funzione Modulo
            If Abs(deltat#) >= tr# / 2 Then
              deltat# = (Abs(deltat#) - tr#) * sg
              psia# = (Abs(psia#) - psir#) * sg
            End If
 End If
```

```
(```) LISTATO del Programma in QuickBasic, fino al calcolo
'     dei vettori Posizione e Velocita'
'  Dati iniziali (Elementi UNIVERSALI)
'  nell'ordine: al, q, i, Om, om, tau
  COLOR 14, 1: CLS
  DEFDBL A-Z
'                       Esempio orbita ELLITTICA
  AL = -1.321604534#: Q = .455635165#: EI = 6.87631:
  BOM = 63.07572: OM = 205.6752: TAU = 1.457528167#
'
'                       Esempio orbita PARABOLICA
' AL = 0: Q = .22432: EI = 122.639:
' BOM = 188.943: OM = 131.202: TAU = -.632503976#
'
```

```
'                      Esempio orbita IPERBOLICA
' AL = 4.98736D-04: Q = .555404#: EI = 72.5488#
' BOM = 237.8971#:  OM = 276.7690#: TAU = 1.157986814#
'
PI = 3.141592653589793#
RAD = PI / 180
GM = 1#
TOL = .00000001#

EI = EI * RAD
BOM = BOM * RAD
OM = OM * RAD
PX = COS(OM) * COS(BOM) - SIN(OM) * COS(EI) * SIN(BOM)
PY = COS(OM) * SIN(BOM) + SIN(OM) * COS(EI) * COS(BOM)
PZ = SIN(OM) * SIN(EI)
QX = -SIN(OM) * COS(BOM) - COS(OM) * COS(EI) * SIN(BOM)
QY = -SIN(OM) * SIN(BOM) + COS(OM) * COS(EI) * COS(BOM)
QZ = COS(OM) * SIN(EI)
VP = SQR(2 * GM / Q + AL) ' Velocit al Perielio
XP = Q * PX
YP = Q * PY
ZP = Q * PZ
VXP = VP * QX
VYP = VP * QY
VZP = VP * QZ
' Risoluzione equazione di Keplero espressa con le V.U.
PSIA = TAU / Q
1  B = AL * PSIA * PSIA
S3PARZ=((((B/342+1)*B/272+1)*B/210+1)*B/156+1)
S3 = PSIA*PSIA*PSIA/6*((((S3PARZ*B/110+1)*B/72+1)*B/42+1)*B/20+1)
S2PARZ = ((((B/306+1)*B/240+1)*B/182+1)*B/132+1)
S2 = PSIA*PSIA/2*((((S2PARZ*B/90+1)*B/56+1)*B/30+1)*B/12+1)
S1 = PSIA + AL * S3
S0 = 1 + AL * S2
PSI = PSIA - (Q * S1 + GM * S3 - TAU) / (Q * S0 + GM * S2)
IF ABS(PSI - PSIA) >= TOL THEN
  PSIA = PSI
GOTO 1
  END IF
 PSIF = PSI
'-- Fine iterazione ---
 R = Q * S0 + GM * S2
 F = 1 - GM * S2 / Q
 G = TAU - GM * S3
 F1 = -GM * S1 / (R * Q)
 G1 = 1 - GM * S2 / R
   X = F * XP + G * VXP
   Y = F * YP + G * VYP
   Z = F * ZP + G * VZP
     VX = F1 * XP + G1 * VXP
```

```
     VY = F1 * YP + G1 * VYP
     VZ = F1 * ZP + G1 * VZP
 V = SQR(VX * VX + VY * VY + VZ * VZ)
'
PRINT X,Y,Z,R: PRINT VX,VY,VZ,V: ' Risultati finali
END
```

Fine