Formule ricorsive delle serie (f, g) per il calcolo delle effemeridi di un corpo celeste

Giuseppe Matarazzo

Novembre 2005

Sommario

In meccanica celeste si è sempre fatto largo uso di formule derivanti dallo sviluppo in serie di potenze. Ma in determinati casi, come in quello presentato in questa memoria, il calcolo analitico assumeva sin dai primi termini una notevole complessità, dovuta alla quantità eccessiva di polinomi che si formavano al crescere della potenza della variabile tempo.
Con le formule ricorsive di [1], di facile traslazione in un programma computerizzato, il problema si risolve immediatamente e **senza** far ricorso alla nota *Equazione di Keplero*.
Il metodo di calcolo, appunto perchè basato su sviluppi in serie di potenze della variabile principale, va usato con *cautela*, ossia scegliendo intervalli di tempo $(t - t_0)$ non esageratamente ampi.

1 Analisi del problema

Nella figura (1) viene preso in esame il moto di un corpo P che si muove in un'orbita **conica** qualsiasi (*ellisse, parabola, iperbole)* e di cui si conoscono i *sei* parametri iniziali al tempo $t = t_0$, cioè le tre componenti del vettore posizione $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ e le tre del vettore velocità $\vec{V}_0(Vx_0, Vy_0, Vz_0)$.

Per comodità si è scelto un sistema di riferimento eliocentrico, ma le formule sono valide per qualunque *moto imperturbato* (o dei 2-corpi); basta cambiare di volta in volta il parametro gravitazionale μ.

L'equazione differenziale del moto dei due corpi

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \cdot \mathbf{r} = 0 \tag{1}$$

ha la seguente soluzione:

$$\mathbf{r} = f \cdot \mathbf{r}_0 + g \cdot \mathbf{V}_0 \tag{2}$$

che, resa esplicita nelle tre componenti, permette di calcolare il *vettore posizione* $\vec{r}(x, y, z)$:

$$\begin{cases} x = f \cdot x_0 + g \cdot Vx_0 \\ y = f \cdot y_0 + g \cdot Vy_0 \\ z = f \cdot z_0 + g \cdot Vz_0 \end{cases} \quad \text{e quindi:} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3}$$

Per il calcolo del *vettore velocità* è sufficiente derivare la (2), la struttura delle equazioni rimane uguale, basta sostituire $(\dot{f}, \dot{g})$ al posto di (f, g):

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{f} \cdot \mathbf{r}_0 + \dot{g} \cdot \mathbf{V}_0 \tag{4}$$

e quindi:

$$\begin{cases} V_x = \dot{f} \cdot x_0 + \dot{g} \cdot Vx_0 \\ V_y = \dot{f} \cdot y_0 + \dot{g} \cdot Vy_0 \\ V_z = \dot{f} \cdot z_0 + \dot{g} \cdot Vz_0 \end{cases} \quad \text{e quindi:} \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{5}$$

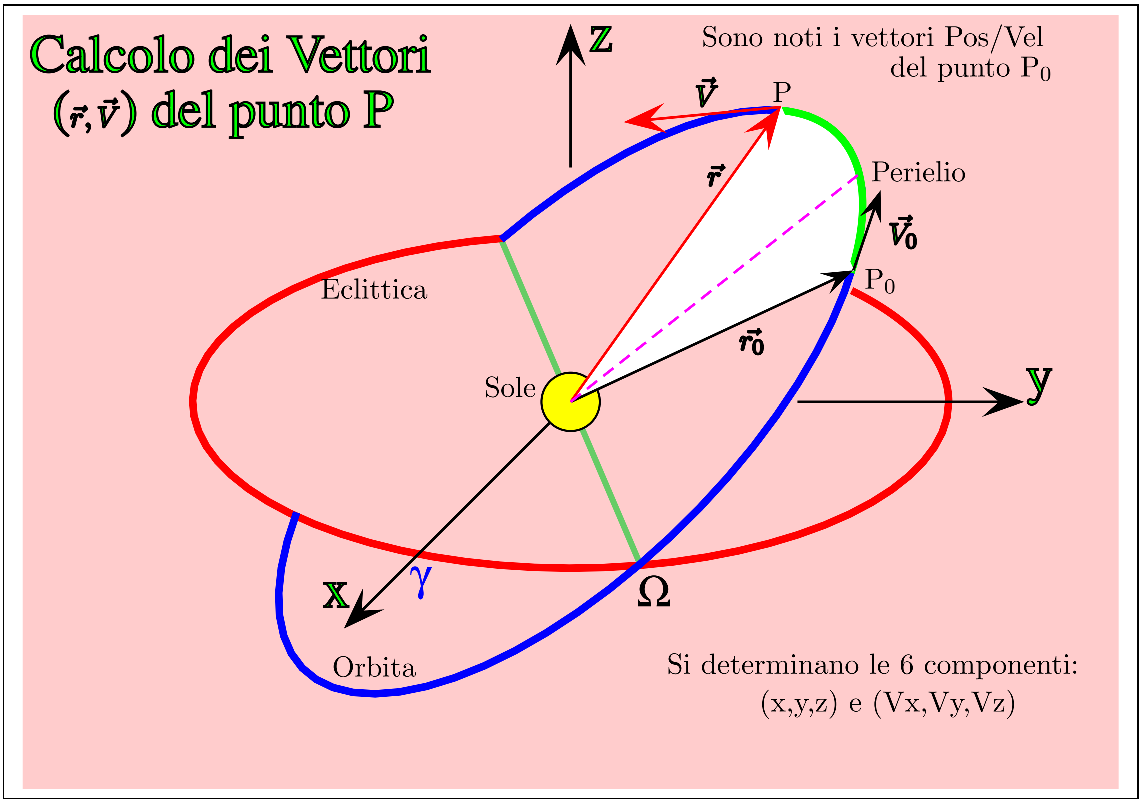

Figura 1: Vettori nello Spazio (sistema eclittico eliocentrico)

I parametri $(\dot{f}, \dot{g})$ si calcolano mediante le seguenti relazioni:

$$\dot{g} = 1 - (1 - f) \cdot \frac{r}{r_0} \qquad\qquad \dot{f} = \frac{f \cdot \dot{g} - 1}{g} \tag{6}$$

2 Le Serie f e g.

Nel lavoro [1] vengono presentate *quattro* funzioni dipendenti dal tempo e sviluppate in serie di potenze. Eccole:

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot (t - t_0) = d_0 + d_1(t - t_0) + d_2(t - t_0)^2 + \cdots + d_n(t - t_0)^n \tag{7}$$

$$h = \frac{\mu}{r^3} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (t - t_0) = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2 + \cdots + c_n(t - t_0)^n \tag{8}$$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t - t_0) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \cdots + a_n(t - t_0)^n \tag{9}$$

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (t - t_0) = b_0 + a_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + \cdots + b_n(t - t_0)^n \tag{10}$$

All'istante iniziale $t = t_0$, la (2) viene soddisfatta per $f(t_0)$=1 e $g(t_0)$=0, per cui avremo $a_0 = 1$ e $b_0 = 0$.
Analogamente, alle stesse condizioni iniziali, la (4) viene verificata quando $\dot{f}(t_0)$=0 e $\dot{g}(t_0)$=1; pertanto si avrà $a_1 = 0$ e $b_1 = 1$.

Nella (7) si deduce immediatamente che $d_0 = r_0$ mentre $d_1 = \dot{r_0}$, che è la velocità radiale all'istante iniziale e vale $\dfrac{\sigma}{r_0}$, essendo $\sigma = x_0 Vx_0 + y_0 Vy_0 + z_0 Vz_0$ il prodotto scalare dei vettori Pos/Vel.

Nella (8) è noto il termine $c_0 = \dfrac{\mu}{r_0^3}$.

Riepilogando, i primi *due* termini delle serie (7),(9) e e (10) sono **noti**, mentre per la (8) è sufficiente conoscere solo c_0 in quanto c_1 viene calcolato per iterazione.

Pertanto possiamo passare a scrivere le **formule ricorsive di Bond** di tutti i termini (infiniti) delle quattro serie:

$$\begin{cases} d_{n+2} = & \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \left(p \cdot c_n - \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} c_{n-\nu} \cdot d_\nu \right) \\ c_n = & \dfrac{-1}{n d_0} \left[3 c_0 n d_0 + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu (3 c_{n-\nu} \cdot d_\nu + d_{n-\nu} \cdot c_\nu) \right] \\ a_{n+2} = & \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \cdot a_{n-\nu} \\ b_{n+2} = & \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \cdot b_{n-\nu} \end{cases} \tag{11}$$

Il parametro p della conica, che compare nella prima serie, è noto dai dati iniziali (Pos/Vel in P_0) e coincide con la costante unitaria del momento angolare: $p = \dfrac{L^2}{\mu}$. Si calcola prima del ciclo iterativo. Sia $\mathbf{L}$ il vettore momento angolare. Dalle note formule della meccanica celeste si ricavano le sue componenti:

$$\begin{cases} L_x = y_0 \cdot Vz_0 - z_0 \cdot Vy_0 \\ L_y = z_0 \cdot Vx_0 - x_0 \cdot Vz_0 \\ L_z = x_0 \cdot Vy_0 - y_0 \cdot Vx_0 \end{cases} \quad \text{e si ottiene:} \quad L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{12}$$

3 Le Formule Ricorsive in BASIC

La traduzione delle (11) in un linguaggio per computer non comporta eccessive difficoltà. Lo facciamo presentando qui appresso la *subroutine* 'serie' del programma Basic PV2.BAS [1]. Un valore ottimale per approssimare (f, g) è $nt = 10$, pari a $n = 12$ termini delle serie.

```
serie:
' Inizio ciclo ricorsivo
' =====================
  FOR n = 0 TO nt
'---------------
' Calcolo dei coefficienti d(n+2)
'---------------
  somd = 0
      FOR nu = 0 TO n
        somd = somd + c(n - nu) * d(nu)
      NEXT
     d(n + 2) = 1 / ((n + 1) * (n + 2)) * (p * c(n) - somd)
'---------------
' Calcolo dei coefficienti c(n)
'---------------
  somc = 0
```

[1] Il listato completo del programma può essere chiesto all'autore via email all'indirizzo: *joematara.at.hotmail.com*

```
IF n = 0 THEN GOTO 49
      FOR nu = 1 TO n - 1
        somc = somc + nu * (3 * c(n - nu) * d(nu) + d(n - nu) * c(nu))
      NEXT
   c(n) = -1 / (n * d(0)) * (3 * c(0) * n * d(n) + somc)
'---------------
49 :
'---------------
' Calcolo dei coefficienti a(n+2)
'---------------
  soma = 0
      FOR nu = 0 TO n
        soma = soma + a(n - nu) * c(nu)
      NEXT
     a(n + 2) = -1 / ((n + 1) * (n + 2)) * soma
'---------------
' Calcolo dei coefficienti b(n+2)
'---------------
  somb = 0
      FOR nu = 0 TO n
        somb = somb + b(n - nu) * c(nu)
      NEXT
     b(n + 2) = -1 / ((n + 1) * (n + 2)) * somb
'---------------
 NEXT n: 'Fine ciclo ricorsivo
'==============================

' Coefficienti f= Sommat.(a_n*tau^n); g= Sommat.(b_n*tau^n)  con n= 0 to nt
' ===========================================================================
 somf = 0
  FOR n = 0 TO nt
   somf = somf + a(n) * tau ^ n: ' essendo tau= t-t0
  NEXT

 somg = 0
  FOR n = 0 TO nt
   somg = somg + b(n) * tau ^ n: ' essendo tau= t-t0
  NEXT
'--------------
  f = somf
  g = somg
'--------------
RETURN
```

4 Un esempio

Riportiamo i risultati dell'effemeride del pianetino 433-Eros, di cui sono dati i vettori Pos/Vel iniziali ad una certa data t_0, dopo 20 giorni di tempo da essa. Le coordinate dei vettori sono espresse in *unità canoniche*: distanze in UA e velocità da moltiplicare per 29.78469 per ottenerne i valori in km/sec.

```
Posizione e Velocità di un corpo celeste - Sviluppo Serie (f,g): Ricorsive
==================== Algoritmo di V.Bond ==================================
         N.ro elementi di ogni serie:     [10]      (Totale= 12)
         Vettore Posiz. iniziale  x0:               [ 1.46113542]
                  [UA]            y0:               [ 0.28082650]
                                  z0:               [ 0.26092516]
         Vettore Veloc. iniziale Vx0:               [-0.32677311]
                [UA/UT0]         Vy0:               [ 0.72850250]
                                 Vz0:               [ 0.02726520]
                 Giorni da t0 (-99 per uscire)=> 20
                    Sistema ECLITTICO Eliocentrico
             Risultati: Vettori Pos/Vel al tempo t
           x=  1.32331851 UA     Vx= -0.47507785 UA/UT0
           y=  0.52463104 UA     Vy=  0.68529891 UA/UT0
           z=  0.26559174 UA     Vz= -0.00081256 UA/UT0
                          -------------
           r=  1.44808446 UA     V =  0.83386703 UA/UT0
                          -------------
                 f =  0.98215293     g =  0.34194957
                 f'= -0.10566314     g'=  0.98138335
```

... Fine (13.11.05) ...

Riferimenti bibliografici

[1] Victor R. Bond
A Recursive Formulation for Computing the Coefficients of the Time Dependent f and g Series Solution to the Two-Body Problem
- The Astronomical Journal, Volume 71, Number 1 - February 1966