Coordinate Dirette e Inverse (metodo di Borkowski) di un punto P in un sistema di riferimento Geocentrico

Giuseppe Matarazzo

Dicembre 2005

Sommario

Scopo di questo lavoro è quello di rivisitare, con l'ausilio di figure ben dettagliate, gli algoritmi che permettono la conversione tra le coordinate geodetiche e geocentriche di un punto rispetto all'ellissoide terrestre.
Il procedimento *diretto*, dalle coordinate geodetiche (ϕ, h) a quelle rettangolari geocentriche (r, z) non presenta eccessive difficoltà.
Invece l'*inverso*, ovvero il passaggio dalle coordinate (r, z) geocentriche a quelle geografiche (ϕ, h) viene generalmente risolto per successive approssimazioni. Qui si è scelta l'elegante soluzione algebrica del radiostronomo polacco Kazimierz Borkowski [1].

1 Introduzione

In un sistema di riferimento *non-inerziale*, com'è quello terrestre, con la forma della Terra approssimata ad un *ellissoide di rotazione*, non serve stabilire la longitudine (λ) del punto P, in quanto questa dipende dal Tempo Siderale (T_{sid}), funzione dell'istante considerato. E' importante invece conoscere la proiezione del raggio vettore OP sul *piano equatoriale* terrestre, che chiamiamo r e vale: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e la quota z di P, anch'essa riferita all'equatore della Terra.
Quindi definiamo **trasformazione diretta** quella che ci permette di determinare (r, z) a partire dalla *latitudine geodetica* (o geografica) ϕ del punto considerato e dalla sua *altezza* h sulla retta normale all'ellissoide e **inversa** la trasformazione contraria, da (r, z) a (ϕ, h).
Quest'ultima presenta maggiori difficoltà nel formalismo matematico, visto che si opera con equazioni di tipo trascendente. E difatti molti autori hanno optato per una soluzione *iterativa*, che converge rapidamente a partire da un valore iniziale che bisogna scegliere con oculatezza. Con l'algoritmo di Borkowski, proposto in questa memoria, si ha una **soluzione esatta** del problema. Le radici immaginarie dell'equazione di *quarto grado* nella variabile ausiliaria t possono essere scartate facilmente e il calcolo di ϕ porta a determinare conseguentemente l'altra incognita h.

Nell'esempio riportato più avanti viene preso come riferimento l'ellissoide GRS80, avente il semiasse maggiore a = 6378.137 km e l'inverso dell'appiattimento terrestre $\dfrac{1}{f} = \dfrac{a}{a-b} =$ 298.25722210, per cui b=6356.752 km.

[1] Kazimierz M. Borkowski: **Transformation of Geocentric to Geodetic Coordinates without approximations** - 1987 - Torun Radio Astronomy Observatory (Poland)

2 Coordinate Dirette

Con riferimento alla figura (1), calcoliamo innanzitutto le due distanze $\overline{\text{VS}}$ e $\overline{\text{QS}}$ che la normale in S all'*ellisse meridiana* intercetta sui due assi coordinati (r, z). La prima distanza $N = \overline{\text{VS}}$ rappresenta anche il raggio di curvatura del *primo verticale* ed è differente dal raggio di curvatura in S della *sezione meridiana* che è quella rappresentata in figura.

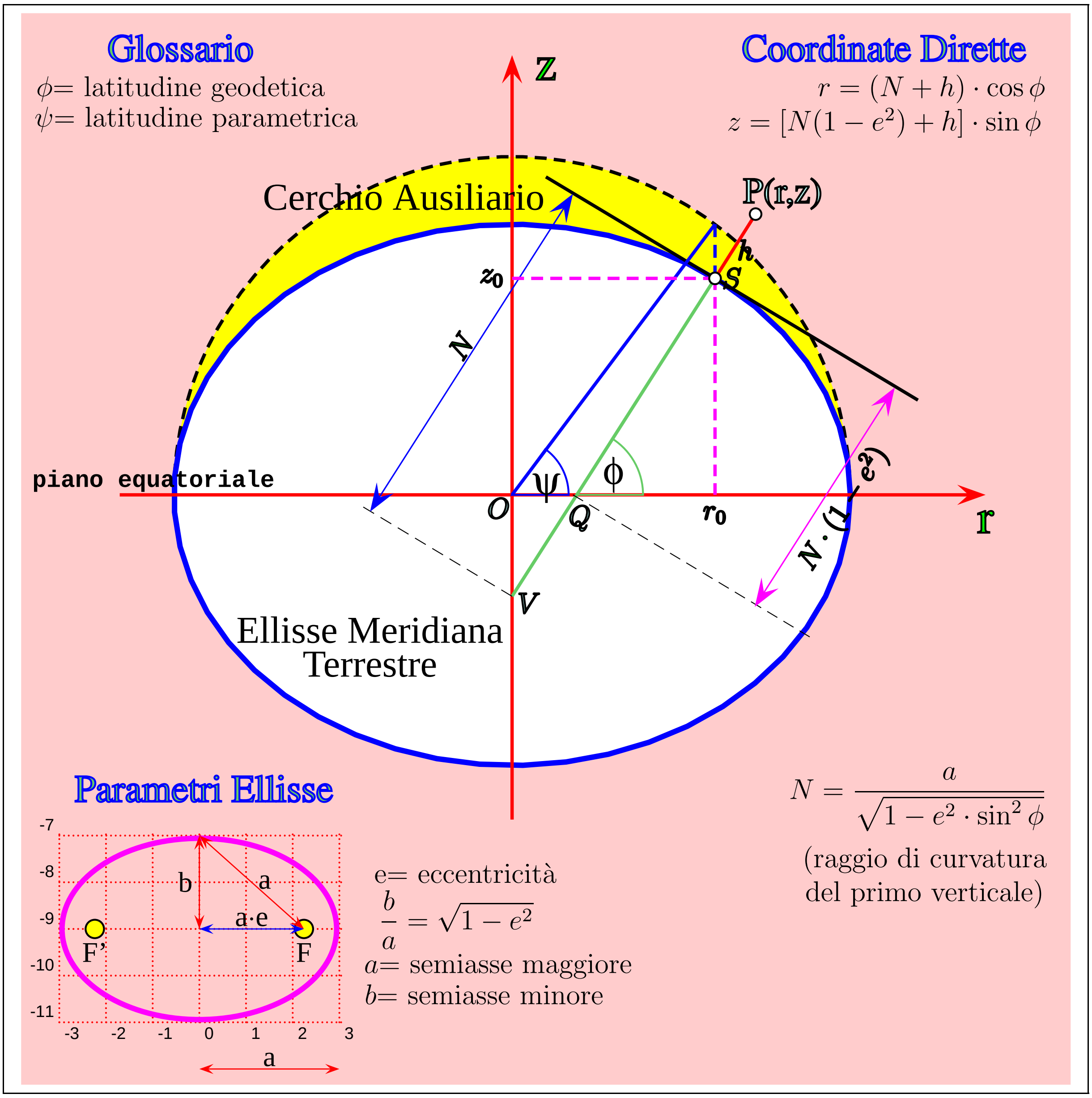

Figura 1: Coordinate Dirette: da (ϕ,h) a (r,z)

Dette (r_0, z_0) le coordinate di S, l'equazione della retta **verticale** passante per S è:

$$z - z_0 = \tan\phi \cdot (r - r_0) \tag{1}$$

e la sua intersezione con gli assi z e r determina le coordinate dei punti V e Q, che sono:

$$V = [0; (z_0 - \tan\phi \cdot r_0)] \qquad Q = \left[\left(r_0 - \frac{z_0}{\tan\phi}\right); 0\right] \tag{2}$$

Le coordinate del punto P, che si trova a *quota* h rispetto alla verticale passante per S, sono pertanto:

$$\begin{cases} r = & (VS+h)\cdot\cos\phi \\ z = & (QS+h)\cdot\sin\phi \end{cases} \tag{3}$$

La posizione del punto S è individuata dalle *coordinate parametriche* dell'ellisse, che sono scritte in funzione dell'angolo ψ, detto appunto *latitudine parametrica* o "ridotta":

$$r_0 = a\cdot\cos\psi \qquad z_0 = b\cdot\sin\psi \tag{4}$$

essendo (a,b) i semiassi maggiore e minore dell'ellisse.

Sostituendo le (4) nelle (2), possiamo determinare i quadrati delle due distanze $N^2 = \overline{\mathrm{VS}}^2$ e $T^2 = \overline{\mathrm{QS}}^2$ conoscendo le coordinate dei tre punti. Otteniamo:

$$N^2 = r_0^2\cdot(1+\tan^2\phi) \qquad\qquad T^2 = z_0^2\cdot\left(1+\frac{1}{\tan^2\phi}\right) \tag{5}$$

2.1 Proprietà dell'ellisse

Vediamo adesso che esiste una relazione semplice che lega gli angoli ψ e ϕ della figura (1).
Il coefficiente angolare della retta *tangente* all'ellisse in S è dato, in termini differenziali, dall'espressione: $m = \dfrac{dz_0}{dr_0}$, mentre quello della *normale* è pari a $\tan\phi$ e, applicando le (4), vale:

$$m' = -\frac{1}{m} = \tan\phi = -\frac{dr_0}{dz_0} = \frac{a\sin\psi\cdot d\psi}{b\cos\psi\cdot d\psi} = \frac{a}{b}\cdot\tan\psi$$

E ricordando la relazione tra i semiassi dell'ellisse e la sua eccentricità (figura [1] in basso a sinistra) otteniamo:

$$\tan\phi = \frac{a}{b}\cdot\tan\psi = \frac{\tan\psi}{\sqrt{1-e^2}} \tag{6}$$

2.2 Calcolo di N e T

Riprendendo la prima espressione delle (5) e la prima delle (4), abbiamo:

$$N^2 = \frac{a^2\cdot\cos^2\psi}{\cos^2\phi} = \frac{a^2}{\frac{\cos^2\phi}{\cos^2\psi}} = \frac{a^2}{\cos^2\phi\cdot(1+\tan^2\psi)}$$

e quindi, applicando la (6), si ottiene

$$N^2 = \frac{a^2}{\cos^2\phi + \frac{b^2}{a^2}\cdot\sin^2\phi} = \frac{a^2}{1-\sin^2\phi+(1-e^2)\cdot\sin^2\phi} = \frac{a^2}{1-e^2\cdot\sin^2\phi}$$

ovvero:

$$\boxed{N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot\sin^2\phi}}} \tag{7}$$

Usiamo ora lo stesso procedimento per T^2 e, saltando alcuni facili passaggi algebrici, arriviamo a:

$$T^2 = \frac{b^4}{a^4}\cdot\frac{a^2}{\cos^2\phi+\frac{b^2}{a^2}\cdot\sin^2\phi} = \frac{b^4}{a^4}\cdot N^2 = (1-e^2)^2\cdot N^2$$

Ed estraendo la radice quadrata positiva da ambo i membri ricaviamo l'espressione:

$$T = (1 - e^2) \cdot N \tag{8}$$

2.3 Coordinate Geocentriche di P

Possiamo allora completare le equazioni (3) e scrivere le **coordinate dirette** cercate:

$$\begin{cases} r = & (N + h) \cdot \cos\phi \\ z = & [N \cdot (1 - e^2) + h] \cdot \sin\phi \end{cases} \tag{9}$$

con N calcolato mediante l'espressione (7).

3 Coordinate Inverse

Cominciamo la nostra trattazione partendo dalle formule scritte alla fine del paragrafo precedente, le (9). Dal sistema delle due equazioni eliminiamo la varibile h ed otteniamo l'espressione:

$$r - \frac{z}{\tan\phi} = N \cdot e^2 \cdot \cos\phi \tag{10}$$

Manipolando il secondo membro, in cui si sostituisce il valore di N della (7), otteniamo:

$$N \cdot e^2 \cdot \cos\phi = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 - b^2 \cdot \tan^2\phi}}$$

per cui la (10) diventa:

$$r = \frac{z}{\tan\phi} + \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 - b^2 \cdot \tan^2\phi}} \tag{11}$$

Adesso utilizziamo un parametro *ausiliario* e poniamo:

$$\tan\phi = \frac{a(1 - t^2)}{2bt} \tag{12}$$

essendo [2] $t = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2})$.

Sostituiamo quindi la (12) nella (11) e otteniamo la seguente equazione algebrica di **4° grado**:

$$\boxed{t^4 + 2Et^3 + 2Ft - 1 = 0} \tag{13}$$

con

$$E = \frac{bz - (a^2 - b^2)}{ar} \qquad F = \frac{bz + (a^2 - b^2)}{ar}$$

che ammette le seguenti *quattro* soluzioni, ricavabili dal doppio segno ($\pm$) di t e G:

$$t = \pm\sqrt{G^2 + \frac{F - vG}{2G - E}} - G \tag{14}$$

[2] Da: K. Borkowski, "Accurate Algorithms to transform Geocentric to Geodetic Coordinates" - 1989 - Bull.Geod.,**63**, pp. 50-56

essendo

$$G = \frac{\pm\sqrt{E^2+v}+E}{2} \qquad v = (\sqrt{D}-Q)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{D}+Q)^{\frac{1}{3}}$$

e inoltre:

$$D = P^3 + Q^2 \qquad P = \frac{4}{3}\cdot(EF+1) \qquad Q = 2\cdot(E^2-F^2)$$

L'autore del metodo dimostra che il caso $D < 0$, che porta a radici *immaginarie* [3], non ha alcun interesse pratico in quanto *inviluppa* dei punti distanti circa 45 km dal centro O dell'ellissoide di riferimento.
Il caso $D > 0$ conduce a *due radici reali*, che si riducono a **una** se si considera, come è nella realtà, la latitudine ϕ che varia nell'intervallo [-90°, +90°].
Possiamo pertanto riscrivere l'equazione (14), che ci dà l'unico valore del parametro t, eliminando i due doppi segni.

$$\begin{cases} t = & \sqrt{G^2 + \dfrac{F-vG}{2G-E}} - G \\ G = & \dfrac{\sqrt{E^2+v}+E}{2} \\ v = & (\sqrt{D}-Q)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{D}+Q)^{\frac{1}{3}} \\ D = & P^3+Q^2 \\ P = & \dfrac{4}{3}\cdot(EF+1) \\ Q = & 2\cdot(E^2-F^2) \end{cases} \tag{15}$$

Noto il valore di t, dalla (12) ricaviamo la prima incognita ϕ ed anche, dopo facili passaggi algebrici (che omettiamo), la seconda h. Eccole:

$$\begin{cases} \phi = & \arctan\left[\dfrac{a(1-t^2)}{2bt}\right] \\ h = & (r-at)\cos\phi + (z-b)\sin\phi \end{cases} \tag{16}$$

4 Listato Basic per le Coordinate Inverse

Il codice Basic presentato in questo paragrafo è stato tratto dalla subroutine GEOD di K. Burkowski [4]. L'esempio che viene mostrato all'interno del programma riguarda le coordinate geocentriche dell'antenna del Telescopio RT32 di Torun.

```
 Listato Basic
 -------------
 DEFDBL A-Z
  pi = 4 * ATN(1#): rad = pi / 180

DEF FNacos (X) = pi/2 - (2+(X<1 AND X>-1))*ATN(X/SQR(1+X*X*(X<1 AND X>-1)))
```

[3] $v = 2\sqrt{-P}\cos[(1/3)\cdot\arccos(-Q/(-P)^{3/2})]$

[4] Sito Web: http://www.astro.uni.torun.pl/~kb/Papers/geod/Geod-BG.htm

```
'-------------
' Costanti
'--------------------------------------------------------------
  a = 6378.137#: ' Ellissoide GRS80: semiasse maggiore in metri
  fr = 298.257222101#: ' inverso dell'appiattimento terrestre
'--------------------------------------------------------------
'----------------
' Dati
  r = 3838.27019#
  z = 5077.03676#
'----------------
' Semiasse b
  b = (a - a / fr) * SGN(z)

' Inizio Calcoli
' --------------
  E = ((z + b) * b / a - a) / r
  F = ((z - b) * b / a + a) / r
'
' Soluzione dell'equazione: t**4 + 2*E*t**3 + 2*F*t - 1 = 0
'
  P = (E * F + 1) * 4 / 3
  Q = (E * E - F * F) * 2
  D = P * P * P + Q * Q
  IF D >= 0 THEN
   s = SQR(D) + Q
   s = EXP(LOG(ABS(s)) / 3) * SGN(s)
   v = P / s - s
'  Migliora l'accuratezza del valore numerico (v)
   v = -(Q + Q + v * v * v) / (3 * P)
'
   ELSE
   v = 2 * SQR(-P) * FNacos(FNacos(Q / P / SQR(-P)) / 3)
   END IF
     G = .5 * (E + SQR(E * E + v))
     t = SQR(G * G + (F - v * G) / (G + G - E)) - G
     fi = ATN((1 - t * t) * a / (2 * b * t))
     h = (r - a * t) * COS(fi) + (z - b) * SIN(fi)

 PRINT "               Risultati":
 PRINT USING "  Latitudine GEODETICA (fi)= ###.####### gradi"; fi/rad
 PRINT USING "  Quota sulla Verticale (h)= #####.##### km"; h
END
----------------------------------
```

```
 Risultati dell'esempio:
'
  Proiez. equator.                r [km]:   3838.27019
  Quota geocentrica di P          z [km]:   5077.03676

                   Risultati
  Latitudine GEODETICA (fi)=  53.0954618 gradi
  Quota sulla Verticale (h)=     0.13361 km
'
```

5 Conclusione

Questo breve excursus può essere utile a molti appassionati di *astrodinamica* che si occupano di satelliti artificiali terrestri o di orbite meteoritiche. Il passaggio da coordinate geocentriche a geodetiche è molto frequente e l'uso di metodi iterativi può, in alcune situazioni, non essere particolarmente agevole, in quanto condizionati, come dicevamo prima, dal valore iniziale di prima approssimazione.
Ciò non succede con il *metodo esatto* descritto in questo lavoro.

..... Fine 23-12-2005 .....