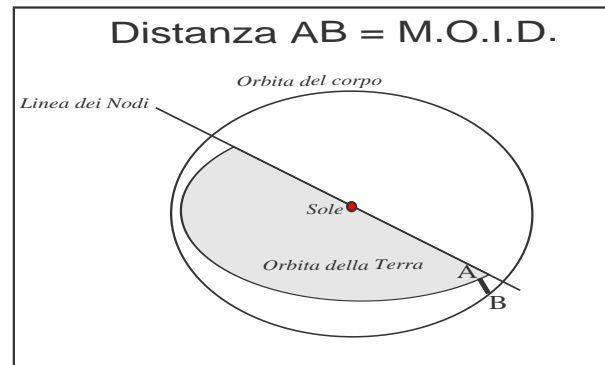


Calcolo del *parametro* di minima distanza assoluta tra l'orbita di un corpo celeste e quella della Terra, il noto MOID, cioè: Minimum Orbital Intersection Distance

Giuseppe Matarazzo - Gennaio 1997

Molto interesse suscita nella comunità astronomica internazionale lo studio di quegli oggetti, come asteroidi e comete, che hanno orbita prossima a quella terrestre e che sono classificati come potenzialmente pericolosi per il nostro pianeta. Ad alcune valutazioni sul probabile impatto di questi NEO (Near Earth Objects) viene dato grande rilievo nei mezzi di comunicazione di massa e, a cadenze periodiche, si assiste ad una sorta di gara al catastrofismo fine a sé stessa.

Il problema è chiaramente di tipo astrodinamico e coinvolge l'attività degli osservatori astronomici di tutto il mondo in stretta collaborazione tra di loro nello scoprire questi oggetti e nel comunicare tempestivamente i loro elementi orbitali ai vari Centri di coordinamento, quali la Space Guard Foundation e il Minor Planet Center. Man mano che vi arrivano i dati osservativi di un corpo 'pericoloso', i suoi parametri orbitali (a, e, i, ω, Ω) diventano sempre più precisi e si procede, per integrazione numerica, al calcolo dell'orbita perturbata e quindi alla stima del massimo avvicinamento dell'oggetto alla Terra nel breve periodo di un secolo. Pur disponendo di potentissimi elaboratori e di sofisticati programmi di calcolo, gli astronomi professionisti, tra cui in prima fila l'autore di [1], si affidano ad una stima preliminare di un *parametro indicativo* che consente di ridurre drasticamente il ricorso



al calcolo dell'orbita definitiva. Si tratta appunto del MOID, acronimo di Minimum Orbital Intersection Distance, che è la distanza minima possibile tra l'orbita dell'asteroide (o della cometa) e quella della Terra.

Con riferimento alla figura vogliamo determinare la distanza minima tra due curve nello spazio *indipendentemente* dalla posizione reale che i due corpi occupano nelle loro traiettorie. E' evidente che, se la minima distanza AB (che si trova ovviamente vicino ai nodi) è molto alta, non è il caso di procedere al calcolo delle effemeridi di massimo avvicinamento in quanto si sa a-priori che essa sarà *comunque* maggiore del MOID e quindi da scartare. Per conoscere qual è il limite del MOID ci affidiamo a quanto viene riportato in [1]: "... un'utile misura riguardante un corpo potenzialmente pericoloso per la Terra (NEO) è la distanza di minima intersezione orbitale(MOID) tra il NEO e la Terra. Il MOID rappresenta quindi la misura del più prossimo avvicinamento di un NEO che non sia in risonanza orbitale. Empiricamente ho trovato che corpi NEO (con l'esclusione di comete a lungo periodo) aventi Earth MOID < 0.050 UA devono essere considerati potenzialmente pericolosi...". Nella pubblicazione via Internet [2] si danno limiti più dettagliati del MOID degli

asteroidi in funzione degli archi osservati, e precisamente: 0.074 UA per intervalli osservati da 3 a 30 giorni, 0.064 UA da 31 a 60g, 0.044 UA da 61g a 3 opposizioni ed infine 0.014 UA per 4 o più opposizioni; per le comete periodiche il limite del MOID terrestre è 0.084 UA.

Analisi del problema

Consideriamo la figura e cerchiamo di impostare il problema chiamando (x, y, z) le coordinate eclittiche di un punto dell'orbita del corpo e $(x_t, y_t, z_t = 0)$ quelle di un punto dell'orbita terrestre. La loro distanza è:

$$s = \sqrt{(x - x_t)^2 + (y - y_t)^2 + z^2}$$

Si tratta di rendere *minima* s utilizzando un metodo per successive approssimazioni che in analisi matematica è detto di Newton; in questo caso però, rispetto al metodo tradizionale ad una variabile, il problema è più complesso in quanto entrano in gioco due variabili, e cioè (θ, l) che sono definite nell'Appendice A. La condizione di minimo relativo è data dall'annullamento delle due derivate prime e dalla soluzione del sistema di due equazioni che ne deriva. Questo si risolve iniziando il processo iterativo con *valori appropriati* di (θ, l) che, come dicevamo sopra, vanno cercati negli intornoi dei due nodi, e più precisamente ponendo:

per il nodo ascendente:

$$\theta_0 = -\omega; \quad l_0 = \Omega$$

per il nodo discendente:

$$\theta_0 = -\omega + 180^\circ; \quad l_0 = \Omega + 180^\circ$$

Alla fine del procedimento, che si chiude quando lo scarto degli affinamenti delle

due variabili è inferiore alla precisione voluta, per es. $(\epsilon_\theta, \epsilon_l) < 1 \cdot 10^{-5}$ radianti, si calcolano due valori minimi possibili della distanza s , il minore dei quali rappresenta il MOID cercato. Il formalismo matematico è sviluppato integralmente nell'Appendice A ed adattato ad uno tra i più comuni linguaggi per computer (QuickBasic); il trasferimento in qualsiasi altro linguaggio di programmazione è pressochè immediato.

Il listato BASIC

E' trascritto nei due fogli dell'Appendice B. Dopo aver letto con la funzione *read-data* i 5 elementi orbitali del corpo (quelli della Terra sono supposti costanti per periodi non secolari), il programma calcola i sei elementi della matrice di trasformazione R_{ik} (con $i = 1, 2, 3; k = 1, 2$) che servono a definire la posizione del corpo nelle funzioni $x(te), y(te), z(te)$ con $te = \theta$; analogo procedimento per la funzione $x_t(el), y_t(el)$ della posizione terrestre, con (el) che indica la longitudine (l) . Andando avanti, nel gruppo B sono riportate, sempre sotto forma di funzioni, i parametri (A, B, C, D, E) , $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E})$ e $(\check{A}, \check{B}, \check{C})$ descritti nell'Appendice A. Gli elementi della matrice jacobiana $(F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22})$ sono definiti nel gruppo D mentre i 3 determinanti (W_0, W_1, W_2) nel gruppo E. A questo punto inizia il processo iterativo partendo dai valori vicini ai nodi. Con (θ_0, l_0) del nodo ascendente si determina il primo valore della distanza minima AB e con la coppia corrispondente del nodo discendente la seconda distanza AB; la minore delle due, selezionata con la funzione *if-then-else*, rappresenta la distanza di minima intersezio-

ne orbitale. E' importante sottolineare che, seppur molto di rado, può succedere che il processo iterativo non si arresti e non si raggiunga alcuna convergenza su (θ, l) ; basta in questo caso usare l'artificio di far slittare di $\pm \frac{\pi}{6}$ o $\pm \frac{\pi}{3}$ i valori iniziali delle variabili e il risultato viene ottenuto.

In fondo al listato, infine, sono scritti 3 DATA con gli elementi di altrettanti asteroidi. Il programma legge solo il primo, ma basta inserire un REM davanti ad esso e viene letto il secondo e così via. Il *MOID* di questi corpi è:

0.000 816 UA per 2201 Oljato
 0.013 917 UA per 3362 Khufu
 0.003 218 UA per 4460 Nereus

che sono in perfetta sintonia con quanto pubblicato in [3]. In base ai limiti indicati in precedenza questi oggetti appartengono alla categoria dei PHA, *Potentially Hazardous Asteroids*.

Nota conclusiva

Il MOID non è un parametro costante in quanto varia al variare degli elementi orbitali del corpo, i quali nel tempo si modificano, anche se *lentamente*, per effetto delle perturbazioni gravitazionali dei pianeti maggiori del sistema solare. Pertanto è buona norma ricalcolare i MOID dei vari corpi celesti ogni qual volta si dispone degli elementi aggiornati.

○ ● ○ ● ○ ● ○

◇ A corredo della relazione: Appendice A, n.2 fogli, Appendice B, n.2 fogli

Riferimenti Bibliografici

[1] Edward Bowell del Lowell Observatory - Flagstaff (Arizona) - USA NEO Dynamical Properties, Orbit Determination, and Impact; lavoro presentato al Planetary Defense Workshop di Lawrence Livermore il 23 Maggio 1995

[2] Osservatorio Astronomico di Sormano - Minor Body Priority List - pubblicazione on-line aggiornata dei NEO di recente scoperta, raggiungibile all'indirizzo: sormano@tin.it

[3] P.Sicoli, F.Manca - Rapporto n.50, Osservatorio di Sormano, 1996

Appendice A

Distanza minima tra 2 curve (ellissi) nello spazio (Sistema di riferimento eclittico)

Coordinate del Corpo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{R_{11} \cdot p \cos \theta + R_{12} \cdot p \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \\ y &= \frac{R_{21} \cdot p \cos \theta + R_{22} \cdot p \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \\ z &= \frac{R_{31} \cdot p \cos \theta + R_{32} \cdot p \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \end{aligned}$$

con $p = a(1 - e^2)$ e il parametro $\theta =$ anomalia del corpo.

$$R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}, R_{31}, R_{32}$$

sono gli elementi della matrice di trasformazione (riportati nel listato dell'Appendice B)

Coordinate della Terra:

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{p_t \cos l}{1 + e_t \cos(l - l_p)} \\ y_t &= \frac{p_t \sin l}{1 + e_t \cos(l - l_p)} \end{aligned}$$

con $p_t = a_t(1 - e_t^2)$ e il parametro $l =$ longitudine della Terra, essendo $l_p =$ longitudine del perielio; $z_t = 0$, in quanto l'orbita terrestre si trova sull'eclittica.

Distanza tra i due punti:

$$s = \sqrt{(x - x_t)^2 + (y - y_t)^2 + z^2}$$

Condizione di **minimo** (o max) relativo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \theta} &= 0 & 1^a \text{ equazione} \\ \frac{\partial s}{\partial l} &= 0 & 2^a \text{ equazione} \end{aligned}$$

Sviluppando le derivate parziali si ha il sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} \frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial s}{\partial y} \frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial s}{\partial z} \frac{dz}{d\theta} &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial x_t} \frac{dx_t}{d\theta} + \frac{\partial s}{\partial y_t} \frac{dy_t}{d\theta} &= 0 \end{aligned}$$

ossia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} \cdot A + \frac{\partial s}{\partial y} \cdot B + \frac{\partial s}{\partial z} \cdot C &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial x_t} \cdot D + \frac{\partial s}{\partial y_t} \cdot E &= 0 \end{aligned}$$

dopo aver chiamato A,B,C le derivate prime di x,y,z rispetto a θ e D,E quelle di x_t,y_t rispetto ad l . Le derivate parziali di s valgono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= -\frac{\partial s}{\partial x_t} = \frac{x - x_t}{s} \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= -\frac{\partial s}{\partial y_t} = \frac{y - y_t}{s} \\ \frac{\partial s}{\partial z} &= \frac{z - z_t}{s} \end{aligned}$$

Posto inoltre $Q = 1 + e \cos \theta$ e $T = 1 + e_t \cos(l - l_p)$, si calcolano le derivate prime e si ottiene:

$$\begin{aligned} A &= \frac{dx}{d\theta} = [-R_{11} \sin \theta + R_{12}(\cos \theta + e)] \cdot p/Q^2 \\ B &= \frac{dy}{d\theta} = [-R_{21} \sin \theta + R_{22}(\cos \theta + e)] \cdot p/Q^2 \\ C &= \frac{dz}{d\theta} = [-R_{31} \sin \theta + R_{32}(\cos \theta + e)] \cdot p/Q^2 \\ D &= \frac{dx_t}{dl} = \{e_t \cdot [-\sin l \cos(l - l_p) + \cos l \sin(l - l_p)] - \sin l\} \cdot p_t/T^2 \\ E &= \frac{dy_t}{dl} = \{e_t \cdot [\cos l \cos(l - l_p) + \sin l \sin(l - l_p)] + \cos l\} \cdot p_t/T^2 \end{aligned}$$

La prima equazione del sistema diventa:

$$\tilde{A} \cdot (x - x_t) + \tilde{B} \cdot (y - y_t) + \tilde{C} \cdot z = F_1(\theta, l) = 0$$

con

$$\tilde{A} = -R_{11} \sin \theta + R_{12}(\cos \theta + e)$$

$$\tilde{B} = -R_{21} \sin \theta + R_{22}(\cos \theta + e)$$

$$\tilde{C} = -R_{31} \sin \theta + R_{32}(\cos \theta + e)$$

e la seconda:

$$\tilde{D} \cdot (x - x_t) + \tilde{E} \cdot (y - y_t) = F_2(\theta, l) = 0$$

con

$$\tilde{D} = e_t \cdot [-\sin l \cos(l - l_p) + \cos l \sin(l - l_p)] - \sin l$$

$$\tilde{E} = e_t \cdot [\cos l \cos(l - l_p) + \sin l \sin(l - l_p)] + \cos l$$

Siano (θ_0, l_0) i valori iniziali delle due variabili; la prima approssimazione di (θ, l) del sistema

$$F_1(\theta, l) = 0 \quad F_2(\theta, l) = 0$$

si ottiene dalle seguenti espressioni:

$$\theta_1 = \theta_0 - W^{-1}(\theta_0, l_0) \cdot F_1(\theta_0, l_0)$$

$$l_1 = l_0 - W^{-1}(\theta_0, l_0) \cdot F_2(\theta_0, l_0)$$

dove W^{-1} è la matrice inversa della matrice giacobiana W che vale:

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} & \frac{\partial F_1}{\partial l} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \theta} & \frac{\partial F_2}{\partial l} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$$

Risolvendo l'inversione della matrice jacobiana W , alla $(i + 1)$ -esima iterazione le incognite diventano:

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \frac{\begin{vmatrix} F_1 & F_{12} \\ F_2 & F_{22} \end{vmatrix}_{(\theta_i, l_i)}}{\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}_{(\theta_i, l_i)}}$$

$$l_{i+1} = l_i - \frac{\begin{vmatrix} F_{11} & F_1 \\ F_{21} & F_2 \end{vmatrix}_{(\theta_i, l_i)}}{\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}_{(\theta_i, l_i)}}$$

mentre le derivate parziali miste, cioè $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}$ si ottengono dopo aver calcolato $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$, ossia le derivate prime di $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ rispetto a θ e \dot{D}, \dot{E} quelle di \tilde{D}, \tilde{E} rispetto ad l :

$$\dot{A} = -R_{11} \cos \theta - R_{12} \sin \theta$$

$$\dot{B} = -R_{21} \cos \theta - R_{22} \sin \theta$$

$$\dot{C} = -R_{31} \cos \theta - R_{32} \sin \theta$$

$$\dot{D} = -\cos l$$

$$\dot{E} = -\sin l$$

Quindi:

$$F_{11} = \dot{A} \cdot (x - x_t) + \tilde{A} \cdot A + \dot{B} \cdot (y - y_t) + \tilde{B} \cdot B + \dot{C} \cdot z + \tilde{C} \cdot C$$

$$F_{12} = -\tilde{A} \cdot D - \tilde{B} \cdot E$$

$$F_{21} = +\tilde{D} \cdot A + \tilde{E} \cdot B$$

$$F_{22} = -\cos l \cdot (x - x_t) - \tilde{D} \cdot D - \sin l \cdot (y - y_t) - \tilde{E} \cdot E$$

○●○●○●○

Appendice B

```

'----- MOID.BAS ----- (Gen.97)--
'Distanza MINIMA tra la traiettoria
'di un Corpo Celeste e quella della
'Terra
'-----
COLOR 14, 6: CLS
pi = ATN(1) * 4: rad = pi / 180
DEF FNr (xq) = xq * rad
' Lettura Dati
READ om, lnode, incl, e, a, w$
om = FNr(om): lnode = FNr(lnode):
incl = FNr(incl): 'Da gradi a rad
'Terra (Fonte: Astronomical
' Algorithms di J.Meeus)
et=.01670862#: lp= FNr(102.937348#)
at = 1.000001018#
p= a*(1-e^2): pt= at*(1 - et ^ 2)
'-----
'Angoli di EULERO {i, , om} per
'calcolo seguente MATRICE di Trasf.
R11 = COS(lnode) * COS(om) -
SIN(lnode) * COS(incl) * SIN(om)
R12 = -COS(lnode) * SIN(om) -
SIN(lnode) * COS(incl) * COS(om)
R21 = SIN(lnode) * COS(om) +
COS(lnode) * COS(incl) * SIN(om)
R22 = -SIN(lnode) * SIN(om) +
COS(lnode) * COS(incl) * COS(om)
R31 = SIN(incl) * SIN(om)
R32 = SIN(incl) * COS(om)
'----- Gruppo A -----
DEF FNQ (te) = 1 + e * COS(te)
DEF FNT (el) = 1 + et* COS(el-lp)
DEF FNx (te) = p / FNQ(te) *
(R11 * COS(te) + R12 * SIN(te))
DEF FNy (te) = p / FNQ(te) *
(R21 * COS(te) + R22 * SIN(te))
DEF FNz (te) = p / FNQ(te) *
(R31 * COS(te) + R32 * SIN(te))

```

```

DEF FNxt (el)= pt* COS(el)/FNT(el)
DEF FNy (el)= pt* SIN(el)/FNT(el)
'----- Gruppo B -----
DEF FNA (te) = p / FNQ(te) ^ 2 *
(-R11 * SIN(te)+ R12*(COS(te)+e))
DEF FNB (te) = p / FNQ(te) ^ 2 *
(-R21 * SIN(te)+ R22*(COS(te)+e))
DEF FNC (te) = p / FNQ(te) ^ 2 *
(-R31 * SIN(te)+ R32*(COS(te)+e))
DEF FND (el)=pt/FNT(el)^2*(et*
(-SIN(el)*COS(el-lp)+COS(el)*
SIN(el-lp))-SIN(el))
DEF FNE (el)=pt/FNT(el)^2*(et*
(COS(el)*COS(el-lp)+SIN(el)*
SIN(el-lp))+COS(el))
DEF FNAtil (te)=FNQ(te)^2*FNA(te)/p
DEF FNBtil (te)=FNQ(te)^2*FNB(te)/p
DEF FNCtil (te)=FNQ(te)^2*FNC(te)/p
DEF FNAast (te) = -R11 * COS(te) -
R12 * SIN(te)
DEF FNBast (te) = -R21 * COS(te) -
R22 * SIN(te)
DEF FNCast (te) = -R31 * COS(te) -
R32 * SIN(te)
DEF FNDtil (el) = et*(-SIN(el) *
COS(el-lp) + COS(el)* SIN(el - lp))
- SIN(el)
DEF FNEtil (el) = et*(COS(el) *
COS(el-lp) + SIN(el)* SIN(el - lp))
+ COS(el)
'----- Gruppo C -----
DEF FNF1 (te, el) =
FNAtil(te) * (FNx(te) - FNxt(el))
+ FNBtil(te) * (FNy(te)- FNy(el))
+ FNCtil(te) * FNz(te)
DEF FNF2 (te, el) = FNDtil(el)
* (FNx(te) - FNxt(el))+ FNEtil(el)
* (FNy(te)- FNy(el))
'----- Gruppo D -----
DEF FNF11 (te, el) = FNAast(te) *
(FNx(te) - FNxt(el)) + FNAtil(te)

```

```

* FNA(te)+FNBast(te) * (FNy(te) -
FNyt(e1)) + FNBtil(te) * FNB(te)+
FNCast(te) * FNz(te) + FNCtil(te)
* FNC(te)
DEF FNF12 (te, e1) = -FNAtil(te) *
FND(e1) - FNBtil(te) * FNE(e1)
DEF FNF21 (te, e1) = FNDtil(e1) *
FNA(te) + FNEtil(e1) * FNB(te)
DEF FNF22 (te, e1) = -COS(e1) *
(FNx(te) - FNxt(e1)) - FNDtil(e1)
* FND(e1) - SIN(e1) * (FNy(te) -
FNyt(e1)) - FNEtil(e1) * FNE(e1)
'----- Gruppo E -----
DEF FNW0 (te, e1) = FNF11(te, e1)*
FNF22(te, e1) - FNF21(te, e1) *
FNF12(te,e1)
DEF FNW1 (te, e1) = FNF1(te, e1) *
FNF22(te, e1) - FNF2(te, e1) *
FNF12(te,e1)
DEF FNW2 (te, e1) = FNF11(te, e1)*
FNF2(te, e1) - FNF21(te, e1) *
FNF1(te,e1)

' te0,e10 = Valori iniziali in RAD
flag = 0
170 IF flag=0 THEN te0 = -om
e10 = lnodo ELSE te0 = -om + pi
e10 = lnodo + pi: flag = flag + 1
180
ddte = FNW1(te0,e10)/FNW0(te0,e10)
ddel=FNW2(te0, e10)/FNW0(te0, e10)
' Iterazione di Newton
te1 = te0 - ddte: e11 = e10 - ddel
COLOR 10: LOCATE 2, 29: PRINT w$:
COLOR 14
LOCATE 4, 5: PRINT USING " Anom-
Corpo=###.##### (##.##^~~~~)
Long-Terra=###.##### (##.##^~~~~)";
te1; ddte; e11; ddel
IF ABS(ddte) < .00001 AND ABS(ddel)
< .00001 THEN 530

te0 = te1: e10 = e11
GOTO 180
530 LOCATE 6, 4: PRINT USING" Solu
zione: Anom-Corpo = ###.##### rad
Long-Terra = ###.##### rad";
te1; e11
' Distanza Minima o Massima
MOID = SQR((FNx(te1)-FNxt(e11))^2+
(FNy(te1)-FNyt(e11))^2+FNz(te1)^2)
a(flag) = MOID
IF flag = 2 THEN 200
GOTO 170
' Scelta della Minima Distanza
200 PRINT : PRINT USING "
[1] ##.##### - [2] ##.#####";
a(1); a(2)
IF a(1) < a(2) THEN MOID = a(1)
ELSE MOID = a(2)
PRINT " Distanza MINIMA tra le 2
Orbite ->";: COLOR 10
PRINT USING "MOID=##.##### \ \";
MOID; "UA": COLOR 14
END
'
' Elementi orbitali Asteroide:
'(om, Om, i, e, a) Epoca 1996 11 13
' -----
DATA 95.94756, 76.88629, 2.51533
DATA 0.7108054, 2.1761613
DATA " 2201 Oljato "
DATA 54.86056, 152.65136, 9.91314
DATA 0.4685598, 0.9894602
DATA " 3362 Khufu "
DATA 157.86562, 314.78255, 1.42488
DATA 0.3605972, 1.4894736
DATA " 4660 Nereus "
' Fine Programma

```

Fine Appendici