Moti centrali
in campo gravitazionale

Giuseppe Matarazzo

Maggio 2017

Sommario

Questa breve memoria vuole essere un'integrazione allo studio della meccanica newtoniana rivolto a studenti di materie scientifiche universitarie che preparano l'esame di Fisica-1. Le figure mostrano, in forma sintetica, le peculiarità delle formulazioni delle note *leggi di Keplero* che spesso non appaiono nelle trattazioni scolastiche, rendendo farraginose le loro applicazioni. Le costanti utilizzate negli esempi sono riportate in Appendice.

1 La conservazione del momento della quantità di moto per unità di massa

E' la seconda legge di Keplero, comunemente (e correttamente) descritta come aree uguali della traiettoria conica *spazzate* in tempi uguali, da cui però sfugge il concetto meccanico della costante conservativa (h) che l'enunciato (**momento angolare specifico**=cost.) racchiude.

$$\underline{\vec{h}} = m \cdot \left(\vec{V} \wedge \vec{r}\right) = \text{costante}$$

per unità di massa diventa: $\qquad \vec{h} = \vec{V} \wedge \vec{r} = \text{costante}$

da cui, in modulo, otteniamo: $\qquad h = V \cdot r \cdot \sin\beta = V_0 \cdot r_0 \cdot \sin\beta_0$

La Fig. 1 mostra come possono essere manipolate le formule in virtù della costante h, ovvero mettendo in relazione una posizione iniziale (V_0, r_0) con quella finale (V, r).

In particolare, nei punti più distanti dal centro di una traiettoria ellittica, si vede come il calcolo delle grandezze in gioco si riduce considerevolmente.

Ed inoltre si possono usare le unità di misura più **comode**, per es. V in km/s ed r in UA (unità astronomiche), essendo analoghe sia al primo che al secondo membro dell'equazione.

1.1 Esempio applicativo

Di un satellite artificiale orbitante attorno alla Terra (supposta sferica ed avente il raggio R=6378 km) sono conosciute le altezze dal suolo, minima=200 km e max=350 km, e la Velocità media $V_m = 7.74\, km/s$. Determinare le velocità al perigeo e all'apogeo, ovvero (V_0, V_1) della Fig. 1.

I moduli dei due raggi vettori si calcolano immediatamente: con

$$r_0 = 6378 + 200 = 6578\, km; \qquad r_1 = 6378 + 350 = 6728\, km$$

Tramite le formule riportate in Fig. 1, otteniamo:

$$e = \frac{150}{13306} = 0.011273109; \qquad a = \frac{13306}{2} = 6653\, km$$

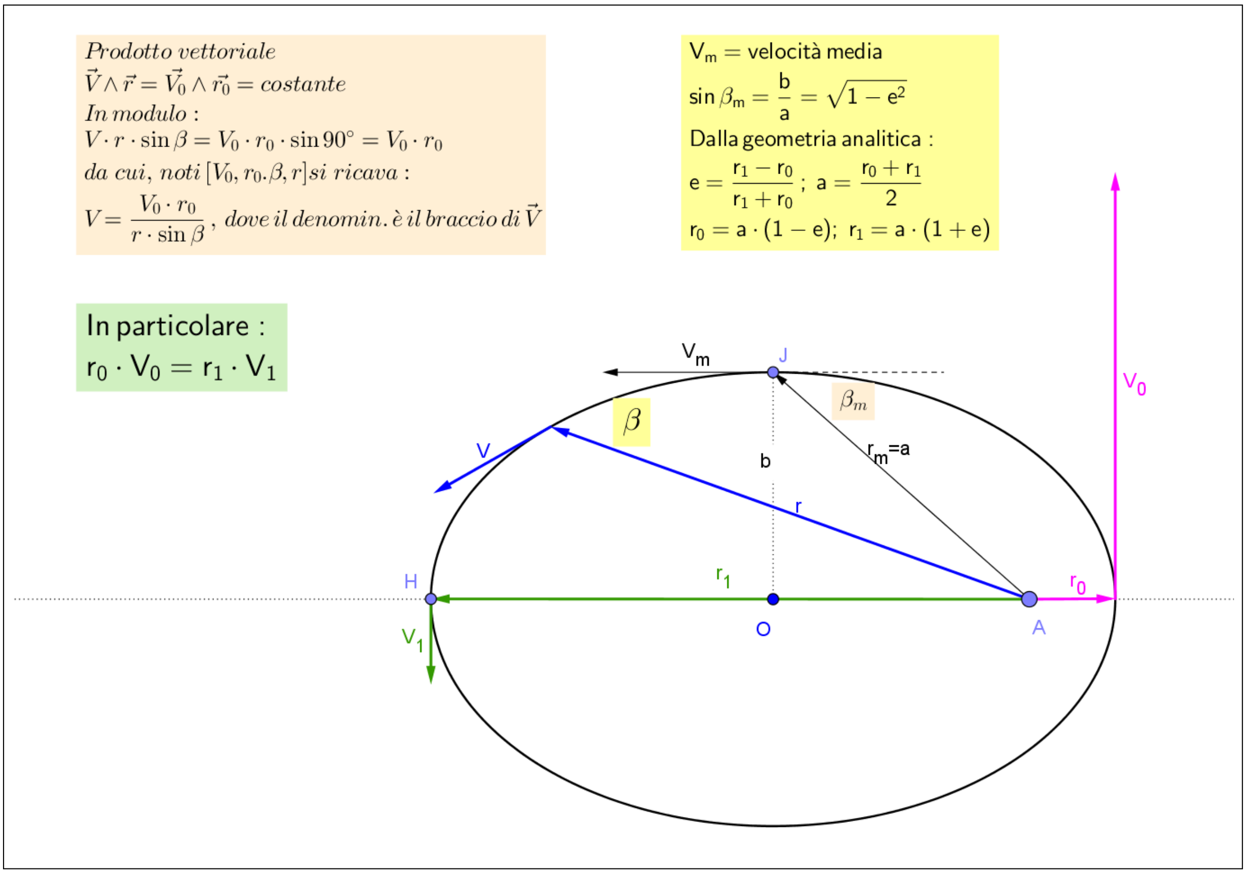

Figura 1: Conservazione del momento della quantita di moto

Ed anche

$$\sin\beta_m = \sqrt{1-e^2} = \sqrt{1-0.011273^2} = 0.999936456$$

Quindi, per la conservazione del momento della quantità di moto nelle due posizioni, al perigeo e in J, si ha:

$$h = V_0 \cdot r_0 = V_m \cdot a \cdot \sin\beta_m = V_1 \cdot r_1$$

da cui

$$V_0 = \frac{h}{r_0} = \frac{7.74 \cdot 6653 \cdot 0.999936456}{6578} = \frac{51490.95}{6578} = 7.83\, km/s$$

$$V_1 = \frac{h}{r_1} = \frac{7.74 \cdot 6653 \cdot 0.999936456}{6728} = \frac{51490.95}{6728} = 7.65\, km/s$$

2 La conservazione dell'energia per unità di massa

Questa è la terza legge di Keplero, che viene enunciata (anche qui correttamente) con la proporzionalità tipica dei moti centrali ad orbite chiuse tra i cubi dei semiassi maggiori e dei quadrati dei periodi di rivoluzione (a^3/T^2), ma da cui sfugge la generalità del teorema dove l'energia E acquista la forma:

$$E = \frac{V_0^2}{2} - \frac{G \cdot M}{r_0} = \frac{V_1^2}{2} - \frac{G \cdot M}{r_1} = \text{costante}$$

se E > 0 la traiettoria del moto è IPERBOLICA

se E = 0 la traiettoria del moto è PARABOLICA

se E < 0 la traiettoria del moto è ELLITTICA

essendo $G{\cdot}M$ il *parametro gravitazionale* (spesso indicato con μ), il prodotto tra la costante di gravitazione universale G e la massa M del corpo che genera l'attrazione. In Appendice sono riportati i valori dei parametri gravitazionali di Sole e Terra.
In un campo conservativo, come quello gravitazionale, è costante l'energia totale

$$E_{tot} = T + U = \text{costante}$$

$$\frac{m \cdot V^2}{2} + \int_r \frac{GMm}{r^2} \mathrm{dr} = \text{cost.}$$

per unità di massa m, avremo: $$\frac{V^2}{2} - \frac{GM}{r} = \text{cost. [1]} \quad \text{(è il noto 'integrale delle forze vive')}$$

Operiamo adesso qualche manipolazione algebrica sull'integrale [1]. Per $r = a$ la velocità media del corpo (di massa trascurabile m) è quella di un moto circolare uniforme $V_m^2 = \frac{GM}{a}$, per cui possiamo scrivere i due valori dell'energia totale per unità di massa nelle due posizioni generiche della traiettoria, ovvero per r ed a, ottenendo:

$$\frac{V^2}{2} - \frac{GM}{r} = \frac{GM}{2a} - \frac{GM}{a} \qquad \text{quindi} \qquad V^2 = GM \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad [2]$$

quindi

$$a = \frac{GM \cdot r}{2GM - rV^2} \quad \text{[2'] con a<0 iperboli, a>0 ellissi, } a \to \infty \text{ parabole}$$

La condizione di traiettoria parabolica si ottiene quando il denominatore della [2'] è **nullo**, ovvero:

$$2GM = rV^2 \qquad \Rightarrow \qquad V = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad \Rightarrow \qquad V_\infty = \sqrt{2} \cdot V_{circolare} \text{ [2'']}$$

La [2] ci ha consentito di mettere in relazione, oltre a V ed r, anche il semiasse maggiore a della conica generica, su cui possiamo fare le seguenti deduzioni.
Poiché il primo termine della [1], nei moti centrali, è inversamente proporzionale al quadrato del raggio vettore, cioè k_1/r^2 ed il secondo, anch'esso proporzionale in maniera inversa ma lineare al raggio, vale a dire k_2/r, possiamo costruire il diagramma dell'*energia totale*, che è del tipo:

$$E_{tot} = \frac{k_1}{r^2} - \frac{k_2}{r} \qquad [3]$$

come mostrato nel grafico della Fig. 2

Il discriminante delle *coniche* è il piano (r, E_{tot}), quando il grafico giace nelle *ordinate positive*, siamo in presenza di **traiettorie iperboliche**, curve aperte che tendono asintoticamente all'infinito in due rami. Nel caso di *ordinate negative* le curve sono chiuse, il moto avviene su **orbite ellittiche** e si può determinare il periodo T di rivoluzione, che è legato al semiasse a della curva dalla nota *terza legge di Keplero*

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_0^3}{T_0^2} = \text{cost.} \qquad [4]$$

Qualche anno dopo Newton vi apportò delle *correzioni* aggiuntive, senza inficiarne la validità, ovvero collegando la formulazione a quella della seconda legge kepleriana (costanza del momento della quantità di moto). Eccola:

$$\frac{c^2}{p} = \mu \; = \; \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \; = \; costante \qquad [5]$$

Il fattore di proporzionalità è il termine $\left(\frac{c^2}{p} = \mu\right)$, essendo c il doppio della velocità areolare del corpo P (2^a legge di Keplero) e p il parametro dell'orbita ellittica di semiassi (a, b). Se l'ellisse viene percorsa nel

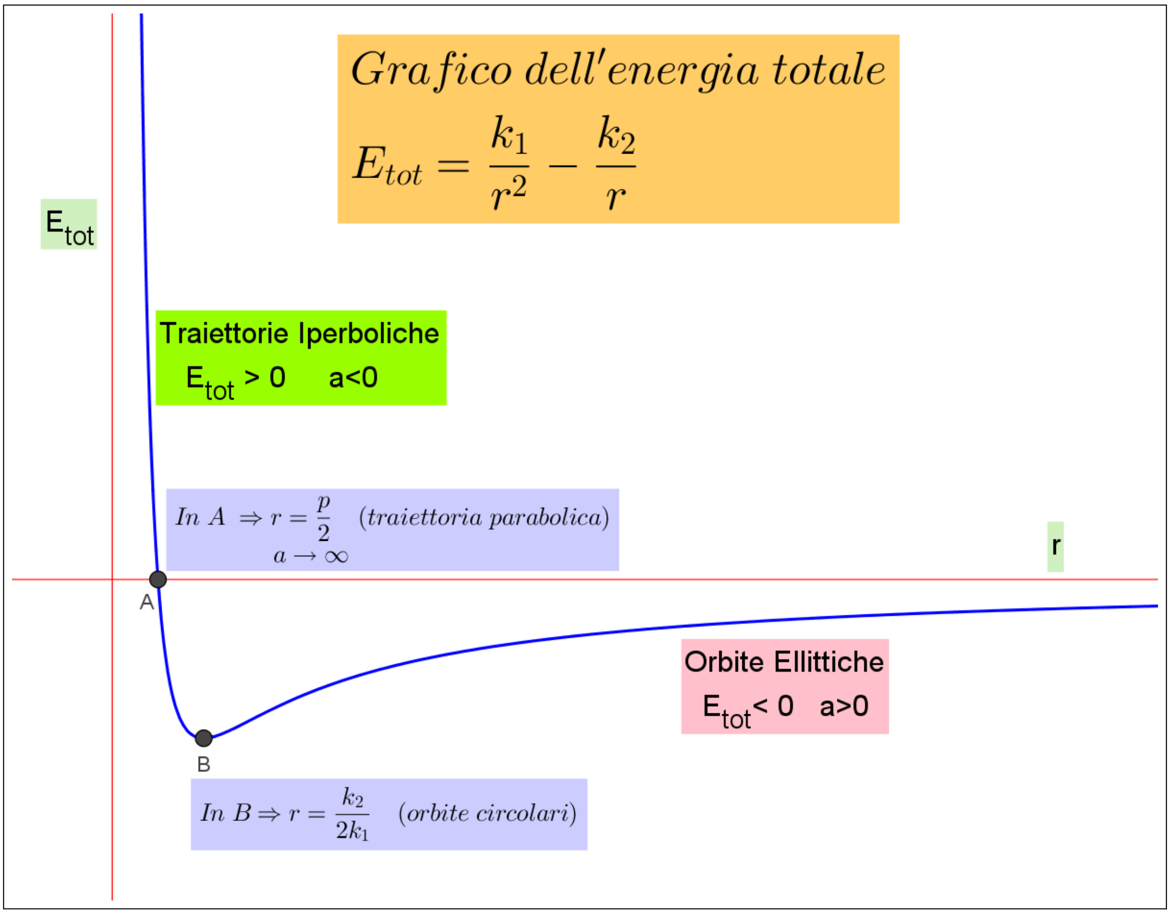

Figura 2: Diagramma dell'energia totale E_{tot} in funzione del raggio vettore r

tempo T (periodo orbitale), la sua area vale πab, per cui $c = \frac{2\pi ab}{T}$; sappiamo inoltre che $p = \frac{b^2}{a}$.

Tornando al grafico della [3], notiamo che il punto A mostra la condizione di **traiettoria parabolica**, che si ottiene quando il raggio è pari al suddetto parametro p, ovvero alla distanza tra il centro del moto (fuoco della conica) e il punto intercettato sulla curva dalla normale condotta dal centro.

Infine, un altro punto particolare è B, che individua la condizione di **orbita circolare**

2.1 Esempi applicativi

1) Satellite artificiale. Altezza minima al suolo $h_p = 197\ km$ e massima $h_a = 230\ km$. Calcolare il periodo di rivoluzione T attorno alla Terra. Il semiasse maggiore a dell'orbita vale:

$$2 \cdot a = h_a + 2 \cdot R + h_p = 230 + 2 * 6378 + 197 = 13183\ km \qquad \Rightarrow \qquad a = 6591.5\ km$$

Manipolando la [5], dopo aver posto $\mu = GM_t$, otteniamo

$$GM_t \cdot T^2 = 4\pi^2 a^3 \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_t}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot 6591.5^3}{398604}} = 5386\ s = 88.76\ min.$$

2) Determinare la *Velocità di fuga* di una sonda spaziale, posta in un'orbita di parcheggio attorno alla Terra ($r_0 = 6478\ km$), per sfuggire alla sua attrazione. Basta sostituire i valori nella [2"], ottenendo $V_c = \sqrt{\frac{398604}{6478}} = 7.844\ km/s$ e quindi $V_\infty = \sqrt{2} \cdot 7.844 = 11.093\ km/s$.

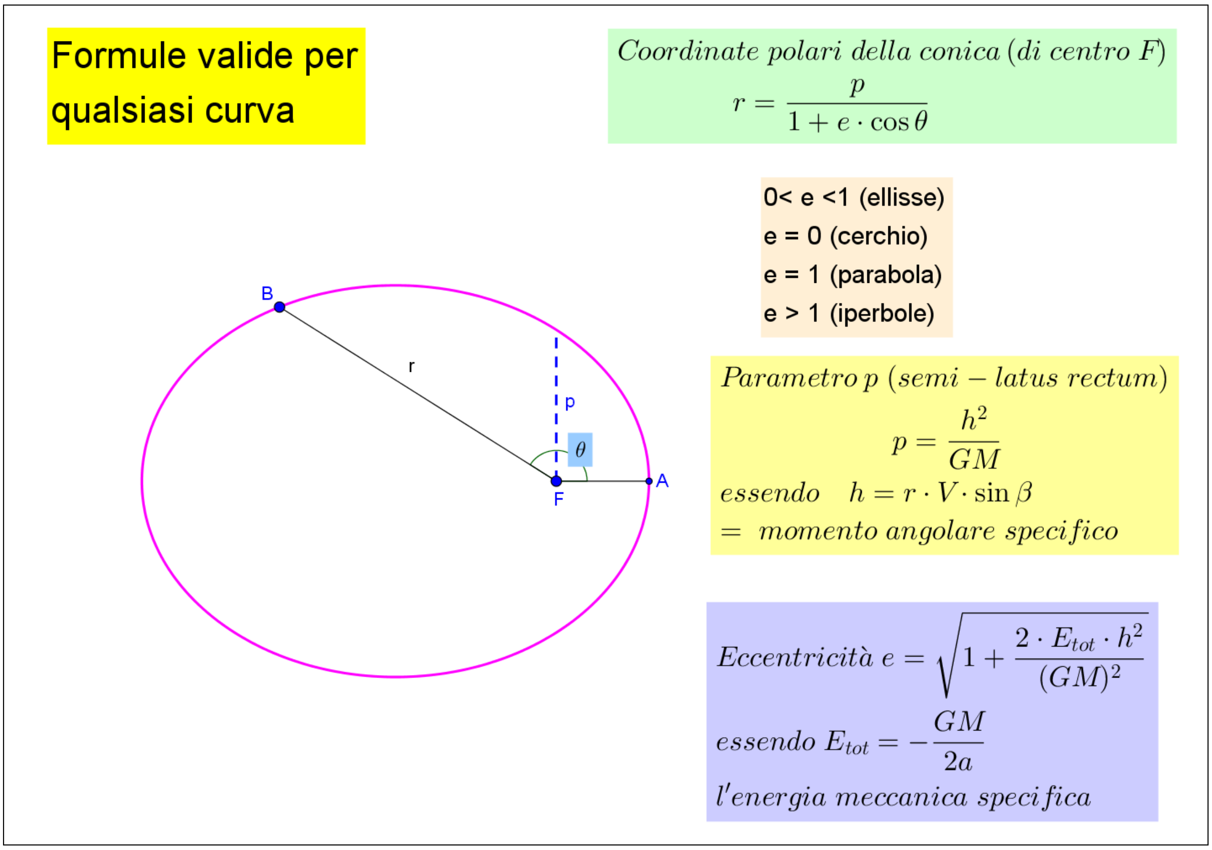

Figura 3: Coordinate polari e parametri (p,e) della conica

3 Parametri della conica

La loro determinazione, facilmente deducibile dalle due proprietà esposte, è *inspiegabilmente* omessa nei libri accademici di Fisica-1. La Fig. 3 ci aiuta a comprenderne il significato.

Infatti, nelle formule in essa esposte, per il calcolo dei parametri della traiettoria vengono utilizzate le due costanti analizzate nei capitoli precedenti: la conservazione del momento angolare (h) e quella dell'energia meccanica (E_{tot}).

3.1 Esempio applicativo

Determinare il parametro (p) della traiettoria dell'esempio del Cap.2 e ricalcolare *dinamicamente* l'eccentricità (e) usando la formulazione della Fig. 3.

Siano note le grandezze al perigeo $V = 7.828\ km$, $r = 6578\ km$ e $\beta = 90°$. Calcoliamo la costante del momento angolare h

$$h = V \cdot r \cdot \sin\beta = 7.828 \cdot 6578 \cdot \sin 90° = 51490.940\ km^2/s$$

da cui determiniamo il parametro $p = \frac{h^2}{GM} = 6651.564\ km$. Quindi, tramite la [2'] ricalcoliamo il semiasse maggiore $a = 6652.396\ km$, i cui lievi scarti rispetto ai 6653 km del dato iniziale sono dovuti agli arrotondamenti.

L'energia meccanica vale $E_{tot} = -\frac{GM}{2a} = -29.959\ km^2/s^2$, valore negativo, che conferma il tipo di conica ellittico.

Infine l'eccentricità $e = \sqrt{1 + \frac{2E_{tot}h^2}{(GM)^2}} = 0.01118338$, che nell'ambito degli arrotondamenti ribatte il dato geometrico del Cap.2.

Inoltre, bisogna tener presente che allo stesso risultato si può pervenire dalla relazione geometrica

$$p = a \cdot (1 - e^2) \quad \rightarrow \quad e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} \qquad con\ a < 0\ , se\ E_{tot} > 0 \quad \text{traiettorie iperboliche}$$

4 Approfondimento

Lo studente può a questo punto migliorare le proprie conoscenze cercando di costruire la funzione $E = E(r)$ della Fig. 2 con delle costanti astrodinamiche al posto di quelle generiche k_1, k_2.

Per far ciò è necessario manipolare le formule del Cap.2 facendo riferimento ai dati dinamici applicati ad un esempio già trattato prima.

Scriviamo l'*integrale delle forze vive* [1] esplicitando il primo termine $\frac{V^2}{2}$ tramite la costante del momento angolare h

$$V \cdot r = h \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V^2}{2} = \frac{h^2}{2r^2}$$

e pertanto l'energia meccanica del moto vale:

$$E = \frac{h^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}$$

essendo $\mu = GM = k_2$ e $\frac{h^2}{2} = k_1$

In termini geometrici le due costanti del moto sono inglobate nel parametro p della Fig. 3, ovvero: $p = \frac{h^2}{\mu}$, per cui la funzione $E = E(r)$ rappresenta una *famiglia di coniche* aventi lo stesso parametro.

Lo possiamo verificare ricorrendo al solito del moto di un satellite terrestre, che parte da un'orbita circolare $r_0 = R + h_{suolo} = 6378 + 122 = 6500\ km$. Da cui, essendo $p = r_0 = 6500\ km$ e $p = \frac{h^2}{\mu}$, otteniamo:

$$\frac{h^2}{2} = 1.295451625e + 09 \qquad \text{e quindi} \qquad E = \frac{1.295451625e + 09}{r^2} - \frac{3.986005e + 05}{r}$$

che il formidabile pacchetto di geometria dinamica *Geogebra* disegna e mette in scala egregiamente in Fig. 4.

Ma ciò non basta. E' meglio scendere in ulteriori dettagli facendo oscillare, per esempio, il raggio vettore da 3000 km a 3500 km.

Il programma computerizzato Python dell'Appendice ci restituisce questa tabella, da cui si nota come in corrispondenza del valore di $r = 3250\ km$, che indica una *traiettoria parabolica* ad eccentricità $e = 1$, l'energia totale sia **nulla**, $E = 0$.

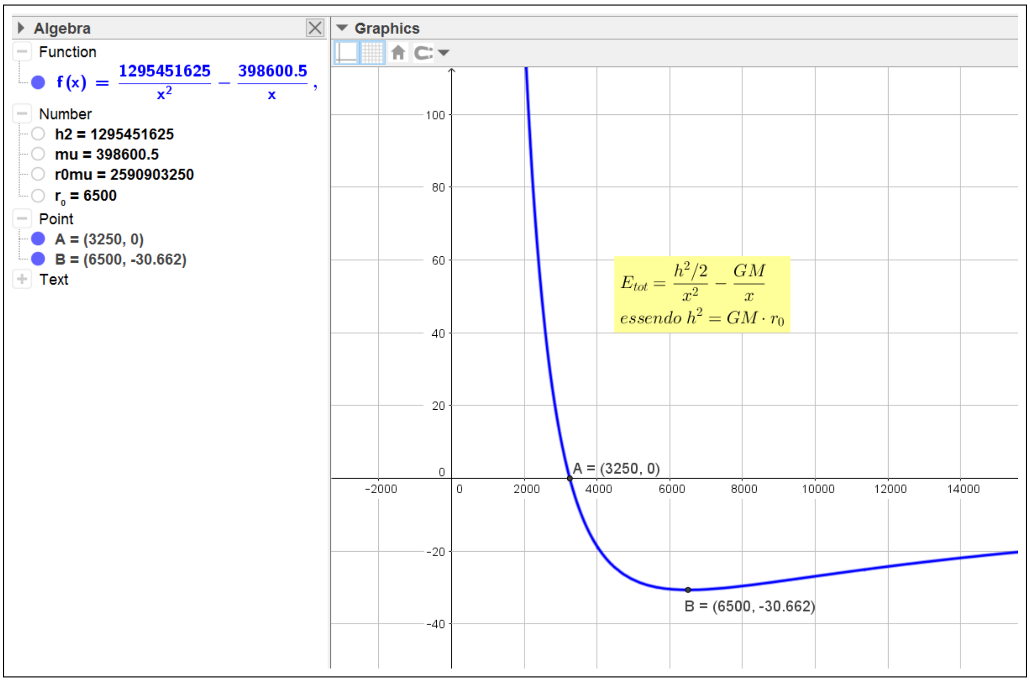

Figura 4: Grafico della funzione $E = E(r)$ applicata al moto di un satellite terrestre

```
---------------------------------------------------------------
r=   3000   V=  16.967   E=   11.072   e=  1.1666667   a=   -18000
r=   3025   V=  16.827   E=    9.801   e=  1.1487603   a=   -20335
r=   3050   V=  16.689   E=    8.570   e=  1.1311475   a=   -23256
r=   3075   V=  16.553   E=    7.377   e=  1.1138211   a=   -27016
r=   3100   V=  16.420   E=    6.222   e=  1.0967742   a=   -32033
r=   3125   V=  16.288   E=    5.102   e=  1.0800000   a=   -39063
r=   3150   V=  16.159   E=    4.017   e=  1.0634921   a=   -49613
r=   3175   V=  16.032   E=    2.966   e=  1.0472441   a=   -67204
r=   3200   V=  15.907   E=    1.946   e=  1.0312500   a=  -102400
r=   3225   V=  15.783   E=    0.958   e=  1.0155039   a=  -208013
---------------------------------------------------------------
r=  3250  V=  15.662  E=   -0.000  e=  1.0000000  a=  111278447258501120000
---------------------------------------------------------------
r=   3275   V=  15.542   E=   -0.929   e=  0.9847328   a=   214512
r=   3300   V=  15.425   E=   -1.830   e=  0.9696970   a=   108900
r=   3325   V=  15.309   E=   -2.704   e=  0.9548872   a=    73704
r=   3350   V=  15.194   E=   -3.552   e=  0.9402985   a=    56112
r=   3375   V=  15.082   E=   -4.374   e=  0.9259259   a=    45562
r=   3400   V=  14.971   E=   -5.172   e=  0.9117647   a=    38533
r=   3425   V=  14.862   E=   -5.946   e=  0.8978102   a=    33516
r=   3450   V=  14.754   E=   -6.698   e=  0.8840580   a=    29756
r=   3475   V=  14.648   E=   -7.427   e=  0.8705036   a=    26835
r=   3500   V=  14.543   E=   -8.135   e=  0.8571429   a=    24500
---------------------------------------------------------------
```

Ed ancora, con una variazione del raggio tra da 6000 km a 7000 km, si può notare come il valore dell'energia meccanica sia minimo ($E = -30.662$) in corrispondenza dell'*orbita circolare*, eccentricità $e = 0$.

Inoltre, le coordinate dell'orbita circolare si ricavano da

$$r_c = \frac{h^2}{\mu} = 6500\ km \qquad \text{e} \qquad E_c = -\frac{\mu^2}{2h^2} = -30.6616$$

Resta confermato come nei **moti centrali** l'energia meccanica totale sia negativa per le curve coniche chiuse (ellisse, cerchio) e maggiore o uguale a zero per le curve aperte (iperbole, parabola).

```
------------------------------------------------------------------
r=   6000   V=   8.483   E=  -30.449   e=  0.0833333   a=      6545
r=   6050   V=   8.413   E=  -30.492   e=  0.0743802   a=      6536
r=   6100   V=   8.344   E=  -30.530   e=  0.0655738   a=      6528
r=   6150   V=   8.277   E=  -30.562   e=  0.0569106   a=      6521
r=   6200   V=   8.210   E=  -30.590   e=  0.0483871   a=      6515
r=   6250   V=   8.144   E=  -30.613   e=  0.0400000   a=      6510
r=   6300   V=   8.080   E=  -30.631   e=  0.0317460   a=      6507
r=   6350   V=   8.016   E=  -30.644   e=  0.0236220   a=      6504
r=   6400   V=   7.953   E=  -30.654   e=  0.0156250   a=      6502
r=   6450   V=   7.892   E=  -30.660   e=  0.0077519   a=      6500
------------------------------------------------------------------
r=   6500   V=   7.831   E=  -30.662   e=  0.0000000   a=      6500
------------------------------------------------------------------
r=   6550   V=   7.771   E=  -30.660   e=  0.0076336   a=      6500
r=   6600   V=   7.712   E=  -30.655   e=  0.0151515   a=      6501
r=   6650   V=   7.654   E=  -30.646   e=  0.0225564   a=      6503
r=   6700   V=   7.597   E=  -30.634   e=  0.0298507   a=      6506
r=   6750   V=   7.541   E=  -30.620   e=  0.0370370   a=      6509
r=   6800   V=   7.485   E=  -30.602   e=  0.0441176   a=      6513
r=   6850   V=   7.431   E=  -30.582   e=  0.0510949   a=      6517
r=   6900   V=   7.377   E=  -30.559   e=  0.0579710   a=      6522
r=   6950   V=   7.324   E=  -30.533   e=  0.0647482   a=      6527
r=   7000   V=   7.272   E=  -30.505   e=  0.0714286   a=      6533
------------------------------------------------------------------
```

Per le orbite ellittiche (chiuse) il *periodo di rivoluzione* T, espresso in secondi, vale:

$$T = \pi\mu\sqrt{\frac{1}{2|E|^3}} = 2\pi a^3\sqrt{\frac{1}{\mu}}$$

Quindi, per $r = 7000\ km$, $T = 5255\ s = 87.58\ minuti$.

Appendice

Grandezze ausiliarie

Parametri gravitazionali ($\mu = G \cdot M$) di Sole e Terra:

Sole $\quad G = 6.672 \cdot 10^{-11}\ Kg^{-1}s^{-2} \quad M = 1.989 \cdot 10^{30}\ Kg \Rightarrow \mu_s = 1.327\,124\,381\,79 \cdot 10^{11}\ km^3/s^2$

$$\text{Terra} \qquad \mu_t \ = \ \frac{1.327\,124\,381\,79 \cdot 10^{11}}{332\,946} \ = \ 398\,600.5\ km^3/s^2$$

essendo la massa della Terra 332946 volte più piccola di quella del Sole

Lunghezze. Nei moti di corpi celesti aventi il Sole come *centro gravitazionale* la grandezza lineare che conviene usare è l'*unità astronomica* UA, pari alla distanza media della Terra dal Sole:

$$UA \ = \ 149\,597\,870\ km$$

mentre per quanto riguarda la Terra il riferimento più *comodo* è il suo raggio medio, che vale

$$DU \ = R \ = \ 6\,378\ km$$

Velocità. Con tali grandezze dimensionali adottate, esse saranno sempre espresse in Km/s.

Codice Python per costruire la tabella E=E(r)

```
# ------ trasatR.py ------ Energia meccanica (Etot),
#                         traiettorie satelliti in funzione di (r)
# ---- Mag.12,2017 ------------
#  -------          E=E(r)= [0.5*h^2/r^2 - mu/r] ,
#                   r variabile intervallo [r1-r2]
import math
rad=math.pi/180.0 # coeff. conversione gradi-rad
# --------------------------------------------------
mu= 398600.5  # 1^ costante, parametro gravitaz. Terra [km^3/s^2]
RT= 6378.0    # Raggio terrestre sferico in km
hs= 122.0     # Satellite in orbita circolare terrestre,
              #altezza dal suolo, km
# --------------------------------------------------
r0= RT+hs           # r0, raggio vettore al perigeo (h_suolo=122km,
                        # r0= 6378+122= 6500 km),per calcolare h
Vc=math.sqrt(mu/r0)    # velocita' orbitale circolare, per calcolare h
#----------------
h= Vc*r0                # 2^ costante, momento angolare
hh2= h*h/2              # h^2/2
#----------------
r1 = input("\n Raggio vettore inferiore r1 [km] [try 2500]: ")
r2 = input(" Raggio vettore superiore r2 [km] [try 8000]: ")
DeltaR= r2-r1 #intervallo di calcolo della funzione E(r)
              # e di altri parametri, in km
# --------------------------------------------------
n = input("\n Numero divisioni dell' intervallo [r1-r2 km] [try 50]: ")
# DeltaR= diviso in n parti
#
dx=DeltaR/n      # parte di incremento di raggio
```

```
#
print
print "  n=", format(n,'d'), "parti di DeltaR"
print "  --------------------------------"
#
# ---- Inizio ciclo ad incrementi di (r) ---------
for j in range (n+1):
 ri= r1 + j*dx                      # ri (variabile indipendente)
 Ei= hh2/ri**2 - mu/ri              # energia totale
 Vi= h/ri                           # Velocita'
 ai=(mu*ri)/(2*mu-ri*Vi**2)         # ai (semiasse maggiore)
 ei=math.sqrt(1+2*Ei*(h/mu)**2)     # eccentricita'
 pi=ai*(1-ei**2)                    # parametro conica
 print "  r= ", format(ri,'5.0f'), "  V= ", format(Vi,'6.3f'),\
       "  E= ", format(Ei,'7.3f'), \
       "  e= ", format(ei,'9.7f'), "  a= ", format(ai,'7.0f')
# ---- Fine ciclo -------

print "\n Costanti del moto: h^2/2= ",format(h*h/2,'.12e'),\
      " mu= ", format(mu,'.12e')
print " Coord. Orbita circolare: rc= ",format(h*h/mu,'7.0f'),\
      " Ec= ", format(-mu**2/(2*h**2),'8.4f')
#
# ---------- EOF: trasatR.py ---------
```

... Fine (13-05-2017) ...