Determinazione degli Elementi Orbitali di un Corpo Celeste noti i Vettori $\vec{r}$ e $\vec{V}$ all'istante t

Giuseppe Matarazzo

Febbraio 2003
Dicembre 2008

I vettori $\vec{r}, \vec{V}$ assegnati

La figura [1] seguente mostra il piano dell'eclittica e quello orbitale del corpo P che ruota attorno al centro gravitazionale O. Sono date le coordinate (x,y,z) del vettore posizione e (Vx, Vy, Vz) del vettore velocità, entrambe riferite all'eclittica. Al tempo t il corpo si trova in P ed essendo noti i 6 parametri suddetti si riesce a calcolare i classici elementi orbitali della conica utilizzando il versatilissimo **metodo vettoriale**.

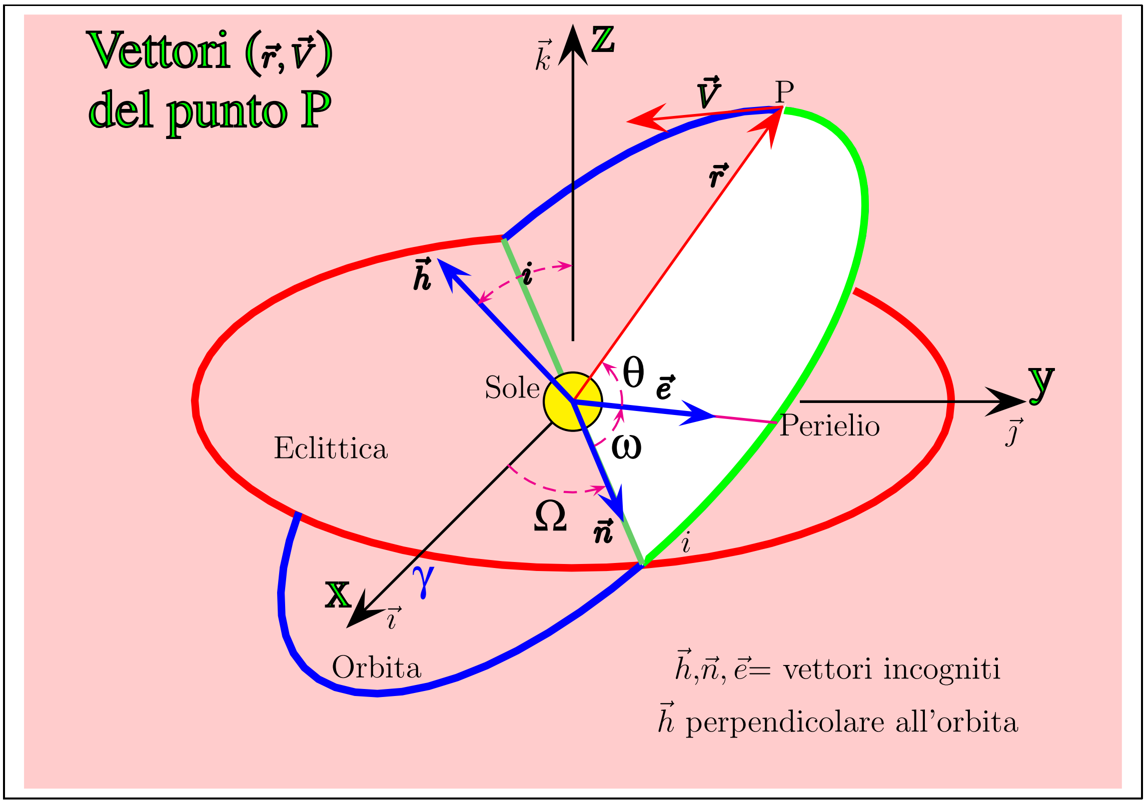

Figura 1: Orbita del corpo orientata rispetto all'Eclittica

Definizione e Calcolo dei Vettori $\vec{h}, \vec{n}, \vec{e}$

Nel sistema di riferimento eclittico O,x,y,z sono $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ i versori degli assi principali. Ruotando dell'angolo Ω il piano eclittico (ij) rispetto all'asse $\vec{k}$ si definisce il vettore $\vec{n}$, che è diretto lungo la *linea dei nodi*. Una successiva rotazione dell'inclinazione i rispetto all'asse $\vec{n}$ individua il vettore $\vec{h}$, mentre ruotando il piano orbitale attorno ad $\vec{h}$ dell'angolo ω si determina il vettore $\vec{e}$, ossia la direzione e il verso del periasse dell'orbita. (Ω, i, ω) sono tre dei sei *parametri orbitali* che andremo a calcolare e sono chiamati angoli di *giacitura*. Il prodotto vettoriale dei due vettori dati $\vec{r}, \vec{V}$ è il vettore *momento angolare*:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = h_i\vec{\imath} + h_j\vec{\jmath} + h_k\vec{k}$$

essendo $h_i = yV_z - zV_y \qquad h_j = zV_x - xV_z \qquad h_k = xV_y - yV_x$ e quindi $h = \sqrt{h_i^2 + h_j^2 + h_k^2}$.

Il vettore $\vec{n}$ è dato dal prodotto vettoriale:

$$\vec{n} = \vec{k} \times \vec{h} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ h_i & h_j & h_k \end{vmatrix} = n_i\vec{\imath} + n_j\vec{\jmath} + n_k\vec{k}$$

con $n_i = -h_j \quad n_j = h_i \quad n_k = 0$ ed $n = \sqrt{h_j^2 + h_i^2}$.
Infine, detti μ il parametro gravitazionale e $\sigma = \vec{r} \cdot \vec{V} = xV_x + yV_y + zV_z$ il prodotto scalare dei vettori dati, definiamo il vettore eccentricità $\vec{e}$ come segue:

$$\vec{e} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\mu}[(V^2 - \frac{\mu}{r}) \cdot x - \sigma \cdot V_x] \\ \frac{1}{\mu}[(V^2 - \frac{\mu}{r}) \cdot y - \sigma \cdot V_y] \\ \frac{1}{\mu}[(V^2 - \frac{\mu}{r}) \cdot z - \sigma \cdot V_z] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{vmatrix} = e_i\vec{\imath} + e_j\vec{\jmath} + e_k\vec{k}$$

e quindi $e = \sqrt{e_i^2 + e_j^2 + e_k^2}$, eccentricità della traiettoria. [1]

Calcolo degli elementi orbitali della Conica

Parametri di forma

Il primo parametro di forma dell'orbita, vale a dire l'eccentricità **e**, è stato determinato sopra tramite le componenti di $\vec{e}$, mentre il secondo **p** si ricava dal momento angolare ed equivale a:

$$p = \frac{h^2}{\mu}$$

La relazione che lega il parametro orbitale p al semiasse maggiore a è la seguente:

$$p = a \cdot (1 - e^2)$$

ed assume validità generale se stabiliamo, *per convenzione*, che il semiasse a della conica sia *negativo* per le traiettorie iperboliche e *positivo* per quelle ellittiche. Quindi $\left(a = \dfrac{p}{1 - e^2}\right)$.
Definiamo adesso un altro *importante* parametro, la **costante energetica** α:

$$\alpha = \frac{-\mu}{a} = V^2 - \frac{2\mu}{r}$$

che ci permette di stabilire le classiche 3 tipologie di orbita:

- **Ellittica** $\alpha < 0$ (a>0)
- **Parabolica** $\alpha = 0$ (a$\to \infty$)
- **Iperbolica** $\alpha > 0$ (a<0)

[1] E' più corretto dire traiettoria invece che orbita, in quanto non sappiamo a-priori se la curva è aperta o chiusa (orbita). Comunque, nel corso della trattazione e nelle figure i due termini indicano la curva nella sua generalità.

Angoli di giacitura

Per l'inclinazione orbitale i ricorriamo ai vettori $\vec{k}$ e $\vec{h}$

$$\cos i = \frac{\vec{k} \cdot \vec{h}}{1 \cdot h} = \frac{h_k}{h}$$

poichè i è sempre minore di 180°, non c'è ambiguità di segno nella formula.
La longitudine del nodo ascendente Ω si determina tramite il prodotto scalare dei vettori $\vec{\imath}$ e $\vec{n}$:

$$\cos \Omega = \frac{\vec{\imath} \cdot \vec{n}}{1 \cdot n} = \frac{n_j}{n}$$

con la condizione che Ω è minore di 180° quando $n_j > 0$.
L'argomento del perielio ω si calcola con:

$$\cos \omega = \frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{n \cdot e} = \frac{n_i \cdot e_i + n_j \cdot e_j}{n \cdot e}$$

con la condizione che ω è minore di 180° quando $e_k > 0$.

Altri angoli caratteristici

Uno di questi è l'*anomalia* θ, ovvero la distanza angolare dal perielio:

$$\cos \theta = \frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e \cdot r} = \frac{e_i \cdot x + e_j \cdot y + e_k \cdot z}{e \cdot r}$$

con la condizione che θ è minore di 180° quando $\sigma = \vec{r} \cdot \vec{V} > 0$.
Un altro angolo, noto in letteratura astronomica, è la l'*argomento della latitudine* u

$$u = \omega + \Omega$$

e la classica *longitudine* (eclittica) definita come somma di angoli che non giacciono necessariamente nello stesso piano:

$$l = \omega + \Omega + \theta = u + \theta$$

Calcolo dell'anomalia media nei 3 casi di Coniche

La determinazione dell'anomalia media M passa attraverso la nota **equazione di Keplero**, che fu trovata dal genio polacco per le orbite ellittiche, ma che ha assunto altre forme per le traiettorie paraboliche (Baker) e per quelle iperboliche, come vedremo più avanti.
In tutt'e 3 i casi bisogna trovare prima l'**anomalia eccentrica** e stabilire le relazioni tra essa e i parametri fin qui noti, dopo di che si può passare al calcolo di M.

$$\begin{cases} M = & E - e \cdot \sin E & \Rightarrow \text{ Orb. Ellittica} & (e < 1) \\ M = & e \cdot \sinh F - F & \Rightarrow \text{ Orb. Iperbolica} & (e > 1) \\ M = & qD + \dfrac{D^3}{6} & \Rightarrow \text{ Orb. Parabolica} & (e = 1) \end{cases} \tag{1}$$

Orbite ellittiche

Per calcolare M dalla prima equazione delle (1) bisogna conoscere l'anomalia eccentrica E, che si ricava dalle seguenti formule:

$$e \cdot \sin E = \frac{\sigma}{\sqrt{\mu a}}$$

$$e \cdot \cos E = 1 - \frac{r}{a}$$

da cui, tramite $\tan E$, si ricava E nel corretto quadrante, ricordando pure che $\sigma = \vec{r} \cdot \vec{V}$ è già noto dal paragrafo precedente. L'anomalia $\boxed{M = E - e \cdot \sin E}$ così ottenuta è espressa in *radianti.*
Adesso passiamo al calcolo del *moto angolare medio* **n**:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{k_{gauss}}{\sqrt{a^3}} \qquad \text{[radianti/giorno]}$$

essendo $k_{gauss} = 0.017\,202\,098\,95$ la *costante* di Gauss.
Ricordiamo che, se adottiamo come *parametro gravitazionale* $\mu = k_{gauss}^2$, le unità di misura di distanze (r) e velocità (V) saranno: $\begin{array}{ccc} \text{r} & \Longrightarrow & \text{UA} \\ \text{V} & \Longrightarrow & \text{UA/giorno} \end{array}$
Il passo successivo è quello di determinare il tempo $\tau = t - T_p$, ovvero il tempo trascorso dal momento T_p del passaggio del corpo al perielio:

$$\tau = t - T_p = \frac{M}{n} \quad \text{[giorni]}$$

Ed infine, per le orbite ellittiche, 'chiuse' come quelle che stiamo trattando, si calcola il *periodo di rivoluzione* P attorno al centro gravitazionale (Sole) con la formula:

$$P = \frac{2\pi}{n} \quad \text{[giorni]}$$

Traiettorie iperboliche

In questo caso l'anomalia M si ricava dalla seconda equazione delle (1) passando attraverso l'anomalia eccentrica F, come segue:

$$e \cdot \sinh F = \frac{\sigma}{\sqrt{-\mu a}}$$
$$e \cdot \cosh F = 1 - \frac{r}{a}$$

e quindi, noti $\sinh F$ e $\cosh F$, si determina $F = \ln(\cosh F + \sinh F)$ e poi $\boxed{M = e \cdot \sinh F - F}$ in *radianti.* Il moto angolare medio n vale:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{-a^3}} = \frac{k_{gauss}}{\sqrt{-a^3}} \qquad \text{[radianti/giorno]}$$

e il tempo τ del passaggio dal perielio:

$$\tau = t - T_p = \frac{M}{n} \quad \text{[giorni]}$$

Traiettorie paraboliche

Quando l'eccentricità e è unitaria la curva è *parabolica*, ma nella realtà esistono delle traiettorie 'simil-paraboliche' con l'eccentricità che si avvicina a 1 (ellissi molto schiacciate) o che appena lo supera.
Non esiste un 'range' specifico di e in cui collocare le traittorie paraboliche, ma alcuni autori [2] adottano $0.9995 < e < 1.0005$ per indicare un'orbita parabolica.

In tal caso, per trovare $\boxed{M = qD + \frac{D^3}{6}}$ si applica la terza equazione delle (1), dove l'anomalia eccentrica D è data da:

$$D = \frac{\sigma}{\sqrt{\mu}}$$

[2] Everhart-Pitkin: **Universal Variables ....**

e la distanza perielica $q = \frac{p}{2}$.
L'intervallo di tempo τ dal passaggio al perielio è:

$$\tau = t - T_p = \frac{M}{\sqrt{\mu}} = \frac{pD + \frac{D^3}{3}}{2\sqrt{\mu}} \quad \text{[giorni]}$$

Finito di stampare il **30 Dicembre 2008**

Stampa in LaTeX