

# Algoritmo Universale per il calcolo delle Effemeridi di un Corpo del Sistema Solare

Giuseppe Matarazzo

Marzo 1997\*

## Sommario

Mediante l'uso delle *Variabili Universali* si perviene alla risoluzione dell'equazione di Keplero generalizzata e all'algoritmo che risolve la generica *conica* e permette di calcolare le coordinate celesti e la velocità di un corpo sottoposto alla gravitazione del Sole.

## 1 Introduzione

Scopo di questo lavoro è quello di ricercare un *metodo generale* per il calcolo della posizione di un astro, essendo noti i parametri orbitali del suo moto imperturbato attorno al Sole. E' un problema che è stato risolto sin dai tempi di Keplero e Newton e che nella divulgazione scientifica viene sempre spezzettato in 3 parti, a seconda del tipo di traiettoria conica descritta dal corpo: *ellisse o parabola o iperbole*. Ciò è dovuto alla necessità di risolvere 3 differenti equazioni trascendenti, vale a dire: la classica, e sempre elegante, equazione di Keplero ( $E - e \sin E = M$ ) per il moto ellittico, quella di Barker ( $D^3 + 6\mu q D = 6\mu^2 \tau$ ) per il parabolico e un'altra, riconducibile alla prima, per il moto iperbolico ( $e \sinh F - F = M$ ).

Poichè l'equazione differenziale del moto ( $\mathbf{r}'' + \mu \mathbf{r}/r^3 = 0$ ) è **unica** ed unica è pure la traiettoria conica risultante, è possibile adottare un **solo** algoritmo per il calcolo delle effemeridi, senza essere obbligati a precisare il tipo di curva in esame.

Ci accingiamo a farlo utilizzando il metodo delle *Variabili Universali*, in cui si introduce il concetto di *anomalia eccentrica generalizzata*.

## 2 Analisi del problema

Per definire un'orbita ellittica o iperbolica sono necessari *6 parametri*, e cioè i 3 angoli di Eulero ( $i, \Omega, \omega$ ), il semiasse maggiore e l'eccentricità ( $a, e$ ) e quindi l'anomalia media  $M$  del corpo al tempo  $t$ , mentre per una traiettoria parabolica gli **elementi orbitali** si riducono a 5, essendo sempre costante l'eccentricità ( $e = 1$ ); in questo caso è consuetudine introdurre, oltre agli angoli euleriani, l'epoca del passaggio del corpo al perielio ( $T_p$ ) e la sua distanza ( $q$ ).

Il primo passo da effettuare è quello di rendere uniforme, cioè applicabile universalmente, l'insieme dei sei parametri orbitali. Per esempio gli elementi  $a, e$  non possono essere presi in considerazione perchè la distanza perielica, calcolata tramite la nota formula  $q = a(1 - e)$ , risulterebbe infinitamente grande nelle orbite paraboliche; stesso discorso si può fare per  $M$  che ha un valore definito nelle orbite ellittiche e iperboliche, ma è nulla in quelle paraboliche. Invece, gli angoli di giacitura della curva ( $i, \Omega, \omega$ ) presentano senza dubbio i caratteri dell'universalità applicativa.

Stabilendo *per convenzione* che il semiasse  $a$  della conica sia *negativo* per le orbite iperboliche e *positivo* per quelle ellittiche, troviamo il primo parametro valido per le 3 curve, e cioè la distanza perielica. Difatti la formula  $q = a(1 - e)$  'copre' le traiettorie ellittiche ed iperboliche e  $q$  è un parametro assegnato

---

\*Ristampa con figura in PSTricks, Dic.2005

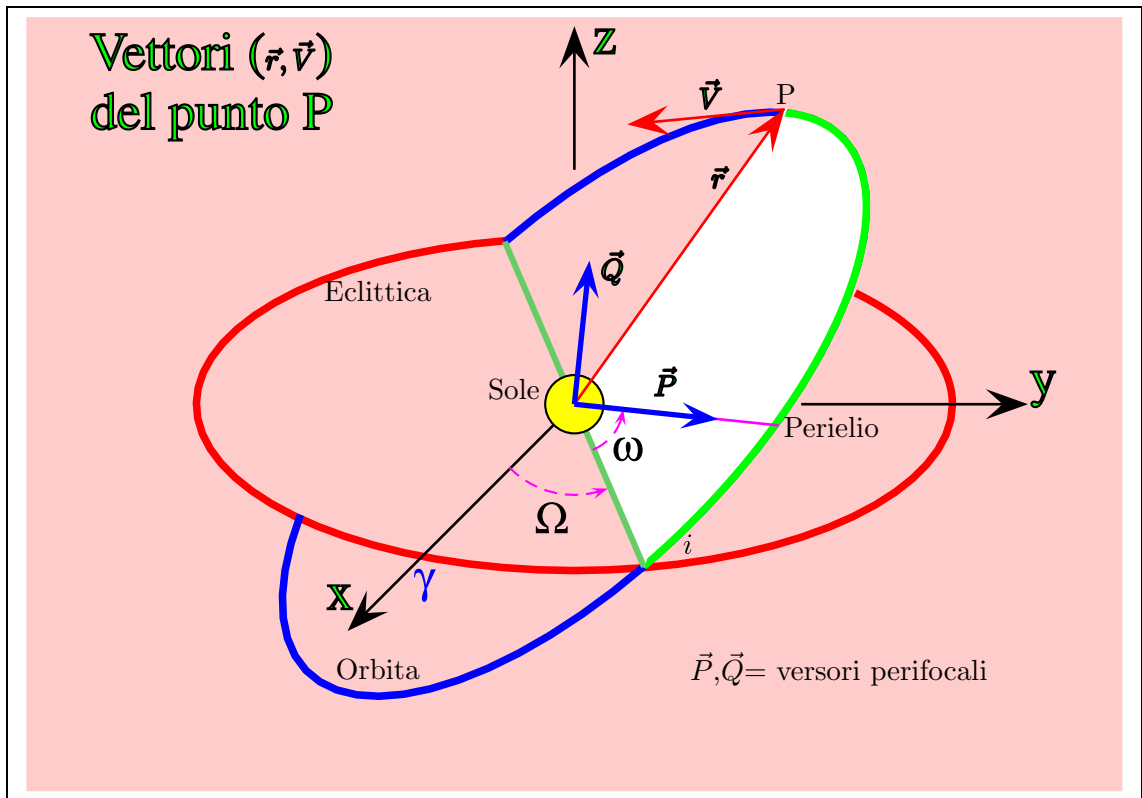


Figura 1: Orbita del corpo orientata rispetto all'Eclittica

per quelle paraboliche. La seconda grandezza di applicabilità generale è la **costante energetica** del moto ( $\alpha = \frac{-\mu}{a}$ ), che ha sempre un valore definito, anche nelle curve paraboliche quando  $a \rightarrow \infty$  ed  $\alpha = 0$ . L'ultimo parametro da individuare è quello temporale, e cioè ( $\tau = t - T_p$ ), che è noto nelle orbite paraboliche e facilmente calcolabile nelle altre con la seguente formula:

$$\tau = t - T_p = \frac{M}{n} \quad (1)$$

essendo  $M$  l'anomalia media espressa in gradi,  $n = \frac{K_{gauss} \cdot 180/\pi}{|a|^{3/2}}$  il moto medio del corpo in gradi/giorno e  $K_{gauss}$  la costante di Gauss. Il tempo  $\tau$  sarà quindi espresso in giorni giuliani.

Adottiamo come unità di misura quelle *canoniche*, in cui il parametro gravitazionale è unitario ( $\mu = 1$ ), le lunghezze sono misurate in unità astronomiche ( $1 UA = 149\,597\,870$  km), i tempi in  $UT_0$  (cioè giorni moltiplicati per la costante  $K_{gauss} = 0.017\,202\,098\,95$ ) e le velocità in  $UA/UT_0$ , la cui unità equivale a  $29.78469$  km/s

Riepilogando i **6 elementi orbitali universali** sono:

$$q, \quad \alpha = -1/a, \quad \tau = K_{gauss} \cdot (t - T_p), \quad i, \quad \Omega, \quad \omega \quad (2)$$

Facendo riferimento al *Sistema di Coordinate Eclittiche*, ci calcoliamo innanzitutto le componenti dei *Versori Perifocali* ( $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ ); come mostrato in figura, il primo di questi vettori unitari ( $\mathbf{P}$ ) è diretto dal centro gravitazionale (Sole) al perielio orbitale, mentre  $\mathbf{Q}$  è normale ad esso e giace nel piano dell'orbita.

(3)

$$\begin{aligned} P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega & Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega \\ P_y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega & Q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega \\ P_z &= \sin \omega \sin i & Q_z &= +\cos \omega \sin i \end{aligned}$$

Dall'equazione del moto centrale si ricava il valore della *velocità orbitale*:

$$V = \sqrt{\frac{2}{r} + \alpha} \quad e \text{ al perielio} \quad V_p = \sqrt{\frac{2}{q} + \alpha} \quad (4)$$

A questo punto possiamo calcolare i vettori Posizione e Velocità del corpo al *perielio*:

$$\vec{r}_p = q \cdot \vec{P} \quad \vec{V}_p = V_p \cdot \vec{Q} \quad (5)$$

Esplicitando le componenti si ottiene:

$$\begin{aligned} x_p &= q \cdot P_x & V x_p &= V_p \cdot Q_x \\ y_p &= q \cdot P_y & V y_p &= V_p \cdot Q_y \\ z_p &= q \cdot P_z & V z_p &= V_p \cdot Q_z \end{aligned} \quad (6)$$

Siamo così passati dai sei parametri iniziali a queste sei grandezze, che ci consentono di determinare il *vettore posizione*  $\vec{r}$  dell'astro al tempo  $t$  e quindi le sue coordinate *polari geocentriche*  $(AR, \delta)$ , essendo note quelle del Sole Apparente.

### 3 Le Variabili Universali

L'equazione trascendente di Keplero viene così definita:

$$\tau = r_0 S_1 + \sigma_0 S_2 + \mu S_3 = q S_1 + S_3 \quad (7)$$

essendo noti il *raggio vettore iniziale*  $r_0 \equiv q$  e il prodotto scalare  $\sigma_0 = \vec{r}_0 \cdot \vec{V}_0$ ; quest'ultimo è *nulla* perchè al perielio i due vettori sono perpendicolari.

Il raggio vettore  $r$  al tempo  $t$  è determinato dall'equazione:

$$r = r_0 S_0 + \sigma_0 S_1 + \mu S_2 = q S_0 + S_2 \quad (8)$$

essendo  $(S_0, S_1, S_2, S_3)$  le **Funzioni Coniche Generalizzate** definite mediante uno sviluppo in serie polinomiale avente come variabile il parametro

$$\beta = \alpha \cdot \psi^2 \quad (9)$$

con  $\alpha$  uguale alla costante energetica del moto (nota) e  $\psi$  chiamata **anomalia eccentrica generalizzata** e definita dalla trasformazione di Sundman ( $d\psi = d\tau/r$ )

La *formula ricorsiva* delle funzioni coniche  $S_n$  è la seguente:

$$S_n = \psi^n \cdot \left( \frac{1}{n!} + \frac{\beta}{(n+2)!} + \frac{\beta^2}{(n+4)!} + \frac{\beta^3}{(n+6)!} + \dots + \frac{\beta^k}{(2k+n)!} \right) \quad (10)$$

legate tra loro dalla relazione  $S_n = \frac{\psi^n}{n!} + \alpha S_{n+2}$  per cui basta definire il solo sviluppo di  $S_3$  e  $S_2$  per avere anche  $S_1$  e  $S_0$ , vale a dire  $S_1 = \psi + \alpha S_3$  e  $S_0 = 1 + \alpha S_2$ .

Lo sviluppo polinomiale di  $S_3$  e  $S_2$  è riportato in forma *nidificata* nell'Appendice (').

Per risolvere la (7) si comincia a definire un valore iniziale approssimato dell'anomalia eccentrica  $\psi$ , cioè  $\psi_a = \frac{\tau}{r_0} = \frac{\tau}{q}$  e quindi, tramite l'algoritmo iterativo di Newton, si determina per successive approssimazioni:

$$\psi = \psi_a - \frac{F(\psi_a)}{F'(\psi_a)} \quad (11)$$

fino alla precisione voluta  $|\psi - \psi_a| < \epsilon$ . Si può porre  $\epsilon = 1 \cdot 10^{-6}$ . L'espressione  $F(\psi_a)$  è l'equazione di Keplero (7), ossia  $q S_1 + S_3 - \tau$  mentre  $F'(\psi_a)$  è il raggio vettore (8) uguale a  $q S_0 + S_2$

Con l'ultima iterazione si conosce il valore finale dell'anomalia eccentrica  $\psi$  e le corrispondenti funzioni coniche  $S_0, S_1, S_2, S_3$ . Queste consentono di calcolare i parametri lagrangiani **f** e **g** che definiscono il vettore posizione del corpo.

$$f = 1 - \frac{\mu S_2}{r_0} = 1 - \mu \frac{S_2}{q} \quad g = \tau - \mu S_3 = \tau - S_3 \quad (12)$$

Per determinare il vettore velocità serve conoscere gli altri due parametri  $\mathbf{f}'$  e  $\mathbf{g}'$  che valgono:

$$f' = -\frac{\mu S_1}{rr_0} = -\frac{S_1}{rq} \quad g' = 1 - \frac{\mu S_2}{r} = 1 - \frac{S_2}{r} \quad (13)$$

Pertanto i due vettori posizione e velocità al tempo  $t$  sono:

$$\vec{r} = f \cdot \vec{r}_p + g \cdot \vec{V}_p \quad \vec{V} = f' \cdot \vec{r}_p + g' \cdot \vec{V}_p \quad (14)$$

E possiamo scriverne le componenti in forma esplicita:

$$\begin{aligned} x &= fx_p + gVx_p & V_x &= f'x_p + g'Vx_p \\ y &= fy_p + gVy_p & V_y &= f'y_p + g'Vy_p \\ z &= fz_p + gVz_p & V_z &= f'z_p + g'Vz_p \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & V &= \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \end{aligned}$$

Conviene adottare un accorgimento particolare nel caso di *orbite ellittiche multiple*, quando l'intervallo di tempo  $\tau$  supera più volte il periodo di rivoluzione dell'astro; si potrebbero verificare errori di arrotondamento nelle funzioni coniche (10). Il procedimento da usare è descritto nell'Appendice (“).

## 4 Calcolo delle effemeridi

A causa del fenomeno della precessione degli equinozi, i parametri  $(i, \Omega, \omega)$  e l'obliquità dell'eclittica  $\epsilon$  devono essere riferiti ad un'Equinozio Standard; per J2000  $\equiv 1.5/1/2000$   $\epsilon = 23.4392911^\circ$ . Si può passare quindi dalle coordinate *eclittiche* del corpo al tempo  $t$  a quelle *equatoriali* usando le note formule:

$$\begin{aligned} x_{eq} &= x \\ y_{eq} &= y \cos \epsilon - z \sin \epsilon \\ z_{eq} &= y \sin \epsilon + z \cos \epsilon \end{aligned} \quad (15)$$

Per determinare le coordinate geocentriche polari  $(AR, \delta)$  basta conoscere le *coordinate equatoriali geocentriche* del Sole all'equinozio di riferimento  $(x_s, y_s, z_s)$ , generalmente tabulate su file in formato ASCII o facilmente calcolabili. Le formule da applicare sono le seguenti:

$$\begin{aligned} x_{geo} &= x_{eq} + x_s & AR &= \arctan\left(\frac{y_{geo}}{x_{geo}}\right) \\ y_{geo} &= y_{eq} + y_s & & \text{(nel corretto quadrante)} \\ z_{geo} &= z_{eq} + z_s & \delta &= \arcsin\left(\frac{z_{geo}}{r_{geo}}\right) \\ r_{geo} &= \sqrt{x_{geo}^2 + y_{geo}^2 + z_{geo}^2} \end{aligned} \quad (16)$$

## 5 Esempi

Come traccia di calcolo può essere di valido ausilio il listato in BASIC dell'Appendice (“”), dove i dati degli esempi che seguono sono memorizzati nelle sestuple  $(\alpha, q, i, \Omega, \omega, \tau)$

1) ASTEROIDE 1994 WR12 tipo 'Earth Crossing'  
(Shoemaker - M.Palomar USA)

Elementi:

Epoca 2449680.5 (24/11/1994) M=125.38215  
a=0.7566560; e=0.3978305; |om=205.67520  
(J2000) |Om= 63.07572  
| i= 6.87631

EFFEMERIDI alla data 25.0/11/1994

=====

Vettori Perifocali

-0.02457755 0.99398222  
P -0.89533511 Q 0.02561554  
-0.44471450 -0.10650442

Vettori Posizione e Velocità PERIELIO

-0.011198 1.740994 q=0.45563517 UA  
rp -0.407946 Vp 0.044866 Vp=1.7515=52.17 km/s  
-0.202628 -0.186646

Coordinate Equatoriali Geoc. del SOLE (J2000)

-0.455025 -0.803712 -0.348463

Giorno Giuliano del Passaggio al Perielio: 2449596.77033

Vettore Posizione del Pianetino al 25/11/1994

0.45452602  
Coord. Elioc. 0.80842216 r=0.99115851 UA  
0.34964970

-0.00049876 rgeo=0.00488284 UA =730500 km=  
Coord. Geoc. 0.00471016 circa 2 volte la distanza  
0.00118654 Terra-Luna (Earth Crossing)

AR = 06h 24m 10.69s

De = 14gr 03' 47.9''

2) COMETA C/1996 B2 (HYAKUTAKE) - Traiettoria Parabolica

Elementi:

q=0.2243260; T=1996 maggio 2.769= |om=131.202  
=2450206.269 (J2000) |Om=188.943  
| i=122.639

EFFEMERIDI alla data 27.0/3/1996

=====

Vettori Perifocali

0.58762598 0.79847350  
P 0.20971234 Q 0.00595889  
0.78148349 -0.60200047

Vettori Posizione e Velocità PERIELIO

0.131816 2.384194  
rp 0.047043 Vp 0.017793 Vp=2.9859  
0.175302 -1.797537 = 88.93 km/s

Coordinate Equatoriali Geoc. del SOLE (J2000)

0.991162 0.106247 0.046066

Vettore Posizione della Cometa al 27/3/1996

-1.02901220  
Coord. Elioc. -0.12877790 r=1.03862384 UA  
0.05361185  
-0.03784989  
Coord. Geoc. -0.02253041 rgeo=0.10897646 UA  
0.09967765

AR = 14h 03m 03.24s  
De = 66gr 09' 32.8''

## 6 Conclusioni

Spero che queste note abbiano un favorevole *impatto* sugli appassionati di astronomia, in quanto ritengo che il *Metodo delle Variabili Universali* non sia sufficientemente divulgato al di fuori dell'ambito astrodinamico, dove trova applicazione nelle correzioni d'orbita (*problema di Lambert*). Gli algoritmi, all'apparenza complessi, sono di elementare applicazione nei programmi computerizzati ed arrivano a precisioni migliori di quelli tradizionali proprio nelle condizioni più *estremizzate*, cioè nello studio di orbite ad eccentricità prossime, per difetto o per eccesso, all'unità. (02 Mar.1997)

## Riferimenti bibliografici

- [1] **R.H. GOODING: On Universal Elements and Conversion Procedures To and From Position and Velocity** - Celestial Mechanics 44, 1988. p.283-298, Elementi Universali dell'orbita ( $\alpha, q, i, \Omega, \omega, \tau$ )
- [2] **E. EVERHART, E.T. PITKIN: Universal Variables in the Two-Body Problem** - American Association of Physics Teachers - Ago.1983 - p.712-717
- [3] **E.T. PITKIN: A Regularized Approach to Universal Orbit Variables** - A.A.I.A. Journal Vol3 - Ago. 1965 - p.1508, Riduzione Orbite multiple

### A P P E N D I C E

-----

(‘) Sviluppo Polinomiale delle FUNZIONI CONICHE Generalizzate  
=====

(Schema di HORNER nidificato per applicazioni al computer)  
al = alfa; be= beta

La variabile be e' spinta fino all'ottavo grado

s3parz = (((be/342+1)\*be/272+1)\*be/210+1)\*be/156+1)  
S3 = Psi^3/6 \* (((s3parz \*be/110+1)\*be/72+1)\*be/42+1)\*be/20+1)

s2parz = (((be/306+1)\*be/240+1)\*be/182+1)\*be/132+1)  
S2 = Psi^2/2 \* (((s2parz \*be/90+1)\*be/56+1)\*be/30+1)\*be/12+1)  
S1 = Psi+al\*S3  
S0 = 1+al\*S2

-----

(‘‘)ROUTINE in BASIC per la riduzione dell'anomalia eccentrica

generalizzata ad una RIVOLUZIONE, nell'ambito delle orbite chiuse (ELLITTICHE)

Serve a sfruttare meglio l'approssimazione di S3 ed S2, eliminando i ''Round-Off Errors''.

```
deltat# = tau# * kgauss#
psia# = deltat# / q#: ' Valore iniziale di psi
sg = Sgn(deltat#): 'Segno di dt per considerare Tempi NEGATIVI
          'Caso di RIVOLUZIONI multiple in Orbite Ellittiche
If alfa# < 0 Then
  psir# = 2 * pi# * (-alfa#) ^ -.5
  tr# = 2 * pi# * mu# * (-alfa#) ^ -1.5
  deltat# = MODU(deltat#, tr#): 'Funzione Modulo
  psia# = MODU(psia#, psir#): 'Funzione Modulo
  If Abs(deltat#) >= tr# / 2 Then
    deltat# = (Abs(deltat#) - tr#) * sg
    psia# = (Abs(psia#) - psir#) * sg
  End If
End If
```

```
-----
(“”) LISTATO del Programma in QuickBasic, fino al calcolo
' dei vettori Posizione e Velocita'
' Dati iniziali (Elementi UNIVERSALI)
' nell'ordine: al, q, i, Om, om, tau
COLOR 14, 1: CLS
DEFDBL A-Z
'
' Esemplio orbita ELLITTICA
AL = -1.321604534#: Q = .455635165#: EI = 6.87631:
BOM = 63.07572: OM = 205.6752: TAU = 1.457528167#
,
'
' Esemplio orbita PARABOLICA
AL = 0: Q = .22432: EI = 122.639:
BOM = 188.943: OM = 131.202: TAU = -.632503976#
,
'
' Esemplio orbita IPERBOLICA
AL = 4.98736D-04: Q = .555404#: EI = 72.5488#
BOM = 237.8971#: OM = 276.7690#: TAU = 1.157986814#
,
PI = 3.141592653589793#
RAD = PI / 180
GM = 1#
TOL = .00000001#

EI = EI * RAD
BOM = BOM * RAD
OM = OM * RAD
PX = COS(OM) * COS(BOM) - SIN(OM) * COS(EI) * SIN(BOM)
PY = COS(OM) * SIN(BOM) + SIN(OM) * COS(EI) * COS(BOM)
PZ = SIN(OM) * SIN(EI)
QX = -SIN(OM) * COS(BOM) - COS(OM) * COS(EI) * SIN(BOM)
QY = -SIN(OM) * SIN(BOM) + COS(OM) * COS(EI) * COS(BOM)
QZ = COS(OM) * SIN(EI)
```

```

VP = SQR(2 * GM / Q + AL) ' Velocità al Perielio
XP = Q * PX
YP = Q * PY
ZP = Q * PZ
VXP = VP * QX
VYP = VP * QY
VZP = VP * QZ
' Risoluzione equazione di Keplero espressa con le V.U.
PSIA = TAU / Q
1 B = AL * PSIA * PSIA
S3PARZ=(((B/342+1)*B/272+1)*B/210+1)*B/156+1)
S3 = PSIA*PSIA*PSIA/6*(((S3PARZ*B/110+1)*B/72+1)*B/42+1)*B/20+1)
S2PARZ = (((B/306+1)*B/240+1)*B/182+1)*B/132+1)
S2 = PSIA*PSIA/2*(((S2PARZ*B/90+1)*B/56+1)*B/30+1)*B/12+1)
S1 = PSIA + AL * S3
S0 = 1 + AL * S2
PSI = PSIA - (Q * S1 + GM * S3 - TAU) / (Q * S0 + GM * S2)
IF ABS(PSI - PSIA) >= TOL THEN
  PSIA = PSI
GOTO 1
END IF
PSIF = PSI
'-- Fine iterazione ---
R = Q * S0 + GM * S2
F = 1 - GM * S2 / Q
G = TAU - GM * S3
F1 = -GM * S1 / (R * Q)
G1 = 1 - GM * S2 / R
  X = F * XP + G * VXP
  Y = F * YP + G * VYP
  Z = F * ZP + G * VZP
  VX = F1 * XP + G1 * VXP
  VY = F1 * YP + G1 * VYP
  VZ = F1 * ZP + G1 * VZP
V = SQR(VX * VX + VY * VY + VZ * VZ)
,
PRINT X,Y,Z,R: PRINT VX,VY,VZ,V: ' Risultati finali
END

```

**Fine**