Vettori Posizione (X, Y, Z) e Velocità (V_x, V_y, V_z) dei Pianeti del Sistema Solare secondo la Teoria delle Variazioni Secolari VSOP87

Giuseppe Matarazzo*

Novembre 2002

Sommario

Questa teoria consente di calcolare le effemeridi di 8 pianeti del sistema solare con precisioni che nel periodo 1900-2100 variano da 0.001" (Mercurio) a 0.100" (Saturno). I semplici algoritmi di calcolo permettono anche di determinare i vettori velocità e quindi l'evoluzione secolare degli elementi orbitali *classici* senza far ricorso all'integrazione numerica.

1 Introduzione

La teoria planetaria VSOP87 [1] che viene richiamata in questo lavoro è stata sviluppata dal Bureau des Longitudes (BdL) di Parigi nel 1988 e fa riferimento a tutti i pianeti del sistema solare con l'esclusione di Plutone. Il moto perturbato degli *n-corpi* viene risolto mediante l'utilizzo delle serie polinomiali di Poisson, costituite da un numero **elevatissimo** di *termini periodici* che si adattano egregiamente all'elaborazione elettronica. Solo recentemente i DataBase del BdL sono diventati di pubblico dominio e si è avuta la possibilità di accedervi via Internet all'indirizzo *ftp* [2].

2 Scelta del tipo di Teoria

Come mostrato in Figura, dove è riportata integralmente la pag. 310 del lavoro di Bretagnon e Francou, si ha la possibilità di scegliere tra le *sei* soluzioni della teoria, a seconda del sistema di coordinate desiderato e dell'equinozio di riferimento. La versione C, ossia VSOP87C, considera le variabili eliocentriche rettangolari eclittiche (X, Y, Z) e l'Equinozio della Data. Dal sito telematico [2] si possono prelevare i files che sono elencati nel seguente specchietto:

Pianeta	*Nome File*	*Dimensione*
Mercurio	*VSOP87C.mer*	1087.0 *Kb*
Venere	*VSOP87C.ven*	386.6 *Kb*
Terra	*VSOP87C.ear*	560.1 *Kb*
Marte	*VSOP87C.mar*	1106.7 *Kb*
Giove	*VSOP87C.jup*	741.2 *Kb*
Saturno	*VSOP87C.sat*	1170.5 *Kb*
Urano	*VSOP87C.ura*	932.3 *Kb*
Nettuno	*VSOP87C.nep*	385.4 *Kb*

3 Struttura analitica delle Serie

Ogni file è strutturato allo stesso modo. Nelle ultime 3 colonne sono trascritti i *parametri* (A, B, C) che servono per il calcolo; questi sono a loro volta riuniti in 6 gruppi, in base ai moltiplicatori per T^0, T^1, T^2, T^3, T^4 e T^5 e alle coordinate X,Y,Z. In totale si hanno a disposizione 18 gruppi.

*Ingegnere e Astrofilo, Canicattini Bagni (Siracusa) *e-mail:* joematara@gmail.com, file restyled Dic.08

Vediamo, per esempio, come sono trascritti in ogni file i coefficienti (A, B, C) riguardanti la variabile X di Mercurio:

```
                 A            B                C
0.37749277893 4.40259139579   26088.14695905770
0.11918926148 4.49027758439       0.24381748350
0.03840153904 1.17015646101   52176.05010063190
0.00585979278 4.22090402969   78263.95324220609
...............................................
Var: X  Moltiplicatore: T^0   N.ro termini=1853


0.00328639517 6.04028758995       0.24381748350
0.00106107047 5.91538469937   52176.05010063190
0.00032448440 2.68404164136   78263.95324220609
0.00009699418 5.42935843059   26087.65932409069
...............................................
Var: X  Moltiplicatore: T^1   N.ro termini=1023

               e cosi' via fino a:

0.00000000414 4.09017660105       0.24381748350
0.00000000327 2.83894329980   26088.14695905770
0.00000000134 4.51536199764   52176.05010063190
...............................................
Var: X  Moltiplicatore: T^5    N.ro termini= 16
```

4 Calcolo del vettore Posizione

La variabile temporale, quella che contiene la data giuliana di riferimento (JD) dell'effemeride, e' il millennio tropico

$$T = (JD - 2451545)/365250$$

riferito all'equinozio standard J2000 (JD_0=2451545.0)

Sia *Var* la variabile generica, X o Y o Z del pianeta prescelto. Come si vede nella formula sottolineata in Figura 1, essa viene calcolata con questa semplice espressione:

$$Var = T^{\alpha} \cdot A \cdot \cos(B + CT)$$

essendo A una lunghezza espressa in *unità astronomiche*, (B, C) due quantità adimensionali in *radianti* e α un esponente che acquista di volta in volta i valori $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Scritta in forma esplicita, diventa:

$$Var = T^0 \cdot \sum_{i=1}^{n_0} [A_i \cdot \cos(B_i + C_i T)] + T^1 \cdot \sum_{i=1}^{n_1} [A_i \cdot \cos(B_i + C_i T)] +$$

$$T^2 \cdot \sum_{i=1}^{n_2} [A_i \cdot \cos(B_i + C_i T)] + T^3 \cdot \sum_{i=1}^{n_3} [A_i \cdot \cos(B_i + C_i T)] +$$

		Bodies								
Solution	Variables	1	2	3	4	5	6	7	8	9
VSOP 87	a, λ, k, h, q, p	Me	V	EMB	M	J	S	U	N	
VSOP 87A	X, Y, Z	Me	V	E	M	J	S	U	N	EMB
VSOP 87B	L, B, r	Me	V	E	M	J	S	U	N	
VSOP 87C	X, Y, Z	Me	V	E	M	J	S	U	N	
VSOP 87D	L, B, r	Me	V	E	M	J	S	U	N	
VSOP 87E	X, Y, Z	Me	V	E	M	J	S	U	N	Sun
Precision		0.001″	0.006″	0.005″	0.023″	0.020″	0.100″	0.016″	0.030″	

In this paper, after having mentioned our notations and given some characteristics common to our solutions, we will describe the VSOP 87 solution and its different versions as well as the way through which they have been built.

2. Notations. Characteristics common to the different versions

We use the elliptic variables a, λ, k, h, q, p with:

$$k = e\cos\bar{\omega}; \quad q = \sin\frac{i}{2}\cos\Omega$$

$$h = e\sin\bar{\omega}; \quad p = \sin\frac{i}{2}\sin\Omega.$$

where a is the semi-major axis, λ the mean longitude, e the eccentricity of the orbit, $\bar{\omega}$ the longitude of the perihelion, i the inclination, Ω the longitude of the node.

We call:

X, Y, Z the rectangular coordinates,

L, B, r the spherical coordinates.

In our solutions the coordinates are measured in au for what regards the lengths (X, Y, Z, a, r) and in radians for the other quantities. These coordinates are explicit functions of time and are under the form of periodic series and Poisson series. Each term is given under two forms:

Posizione

$$T^{\alpha}(S\sin\varphi + K\cos\varphi) = \boxed{T^{\alpha}A\cos(B + CT)} \qquad (2)$$

In the expressions (2):

—the time T is reckoned in thousands of Julian years from J2000.0

$$T = (\text{Julian date } - 2\,451\,545)/365\,250$$

—the power α of the time T is an integer in-between 0 and 5.

—the argument φ is defined by:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{12} a_i\lambda_i$$

where the a_i are integers.

The quantities λ_i, for $i=1$ to 8, represent the mean longitudes of the eight planets. For $i=9$, 10, 11, and λ_i are Delaunay arguments of the Moon D, F, L, respectively. Finally $\lambda_{12} = \zeta$ represents the mean longitude of the Moon given with respect to the equinox of date.

Each λ_i is under the form:

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + N_i T$$

The λ_i^0 and N_i are given in Table 2.

The two forms of formula (2) are linked by the following relations:

$$A = \sqrt{S^2 + K^2}; \quad B = \sum_{i=1}^{12} a_i\lambda_i^0 + \beta; \quad C = \sum_{i=1}^{12} a_i N_i.$$

where β is given by:

$$S = -A\sin\beta; \quad K = A\cos\beta.$$

The series are organized according to $|S| + |K|$ decreasing which allows to truncate them depending on the precision wanted.

Let us note that since the coordinates are explicit functions of the time, it is easy to get the derivatives with respect to time, and thus the velocities.

$$\frac{d}{dt}[T^{\alpha}(S\sin\varphi + K\cos\varphi)] = \alpha T^{\alpha-1}(S\sin\varphi + K\cos\varphi)$$

$$+ T^{\alpha}(-K\sin\varphi + S\cos\varphi) \times \sum_{i=1}^{12} a_i N_i$$

Velocità

$$= \boxed{\alpha T^{\alpha-1}A\cos(B + CT) - T^{\alpha}AC\sin(B + CT)} \qquad (3)$$

Table 2. Phases λ_i^0 (in radians) and frequencies N_i (in radians per thousand Julian years) of the 12 components of the arguments

i	λ_i^0	N_i
1	4.402 608 842 40	26 087.903 141 574 2
2	3.176 146 696 89	10 213.285 546 211 0
3	1.753 470 459 53	6 283.075 849 991 4
4	6.203 476 112 91	3 340.612 426 699 8
5	0.599 546 497 39	529.690 965 094 6
6	0.874 016 756 50	213.299 095 438 0
7	5.481 293 871 59	74.781 598 567 3
8	5.311 886 286 76	38.133 035 637 8
9	5.198 466 741 03	777 13.771 468 120 5
10	1.627 905 233 37	84 334.661 581 308 3
11	2.355 555 898 27	83 286.914 269 553 6
12	3.810 344 546 97	83 997.091 135 595 4

$$T^4 \cdot \sum_{i=1}^{n_4}[A_i \cdot \cos(B_i + C_iT)] + T^5 \cdot \sum_{i=1}^{n_5}[A_i \cdot \cos(B_i + C_iT)]$$

Con n_0 fino a n_5 si indica il numero dei *termini periodici* della variabile interessata al colcolo. Per la X di Mercurio dell'esempio del paragrafo 3, n_0=1853, n_1=1023, n_2=413, n_3=135, n_4=42 ed infine n_5=16.

5 Calcolo del vettore Velocità

Sempre nello stesso documento di Figura è riportata la derivata prima della variabile (Var) rispetto al tempo T. Chiamata (Vel) questa *velocità*, che vale V_x o V_y o V_z, possiamo scrivere:

$$Vel = \alpha \cdot T^{\alpha-1} \cdot A \cdot \cos(B + CT) - T^{\alpha} \cdot A \cdot C \cdot \sin(B + CT)$$

che in forma esplicita diventa:

$$\begin{aligned}
Vel = \qquad\qquad & -T^0 \cdot \sum_{i=1}^{n_0}[A_i \cdot C_i \cdot \sin(B_i + C_iT)] + \\
T^0 \cdot \sum_{i=1}^{n_1}[A_i \cdot \cos(B_i + C_iT)] & - T^1 \cdot \sum_{i=1}^{n_1}[A_i \cdot C_i \cdot \sin(B_i + C_iT)] + \\
2 \cdot T^1 \cdot \sum_{i=1}^{n_2}[A_i \cdot \cos(B_i + C_iT)] & - T^2 \cdot \sum_{i=1}^{n_2}[A_i \cdot C_i \cdot \sin(B_i + C_iT)] + \\
3 \cdot T^2 \cdot \sum_{i=1}^{n_3}[A_i \cdot \cos(B_i + C_iT)] & - T^3 \cdot \sum_{i=1}^{n_3}[A_i \cdot C_i \cdot \sin(B_i + C_iT)] + \\
4 \cdot T^3 \cdot \sum_{i=1}^{n_4}[A_i \cdot \cos(B_i + C_iT)] & - T^4 \cdot \sum_{i=1}^{n_4}[A_i \cdot C_i \cdot \sin(B_i + C_iT)] + \\
5 \cdot T^4 \cdot \sum_{i=1}^{n_5}[A_i \cdot \cos(B_i + C_iT)] & - T^5 \cdot \sum_{i=1}^{n_5}[A_i \cdot C_i \cdot \sin(B_i + C_iT)]
\end{aligned}$$

6 Schema del calcolo computerizzato

A questo punto si passa all'impostazione delle varie *routine* di calcolo al computer, che a causa dell'estrema *semplicità* dei polinomi di Poisson hanno degli sviluppi molto lineari. Riportiamo qui di seguito un esempio di una *routine Basic*, che può essere trasportata in qualsiasi linguaggio di programmazione.
Supponiamo che i coefficienti della serie di Poisson, relativi al calcolo della X di Mercurio ed al gruppo moltiplicatore T^2 siano stati copiati nel file XT2.MER. Questa semplice routine calcola un fattore della seconda riga della variabile (Var), vettore posizione, e la terza riga della variabile (Vel), vettore Velocità. Con altre 5 procedure simili si determinano posizione e velocità di una variabile, per esempio (X, V_x), e in modo analogo si ottengono (Y, V_y) e (Z, V_z).
Risulta così determinata l'effemeride di un pianeta.

```
REM --------------- 2 ---------------------------
OPEN "XT2.MER" FOR INPUT AS #1
aaa = 0
bbb = 0
DO WHILE NOT EOF(1)
  A$ = INPUT$(49, 1)
  B$ = A$:
  AA$ = MID$(B$, 1, 13)
  BB$ = MID$(B$, 15, 13)
```

```
      CC$ = MID$(B$, 30, 18)
         A = VAL(AA$)
         B = VAL(BB$)
         C = VAL(CC$)
      aaa = aaa + A * COS(B + C * T)
      bbb = bbb - A * C * SIN(B + C * T)
     LOCATE 6, 27: PRINT aaa
    LOOP
          Xsom = Xsom + T ^ 2 * aaa
          Xprisom = Xprisom + 2 * T * aaa + T ^ 2 * bbb
    CLOSE #1
    REM ----------------------------------------------
```

7 Precisioni di calcolo

Le eccezionali precisioni, ottenute applicando questa teoria nell'intervallo 1900-2100, sono stati riportati dai suoi autori nella *Table 1* della solita pag. 310 di Fig.1. Per comodità le riassumiamo nella seguente tabella:

Pianeta	*Precisione*
Mercurio	$0.001''$
Venere	$0.006''$
Terra	$0.005''$
Marte	$0.023''$
Giove	$0.020''$
Saturno	$0.100''$
Urano	$0.016''$
Nettuno	$0.030''$

8 Esempio pratico e confronto con i risultati del Bureau des Longitudes

Scegliamo l'epoca del *transito* di Mercurio sul Sole del 1769. Ecco il file-risultati che viene fuori dal programma FullVSOP.exe, elaborato con gli algoritmi esposti in questa memoria e compilato dal *sempre−verde* linguaggio Basic in doppia precisione. Le distanze sono espresse in unità astronomiche ($1\ UA = 149\,597\,870\ km$) e le velocità in $UA/giorno$.

```
 MERCURIO: ECLITTICA ED EQUINOZIO DELLA DATA - VSOP87  (TDT)
 JD=2367487.41667
    X,Y,Z = +0.2098659776   +0.2320885302   +0.0015260300 UA
 Vx,Vy,Vz = -0.0263631183   +0.0203818127   +0.0040641222 UA/g
```

Il tabulato del BdL si presenta così:

```
PLANETARY SOLUTION VSOP87C            BODY: MERCURY
-----------------------------------------------------------
Heliocentric rectangular coordinates. Dynamical equinox and
ecliptic of the date.

Date: 09 / 11 / 1769     Julian date: 2367487.416667
Time: 22h 00m 00s TD     Precision of the complete solution

 X: .2098659776 au       X':  -.0263631183 au/day
```

```
 Y: .2320885302 au       Y':   .0203818127 au/day
 Z: .0015260300 au       Z':   .0040641222 au/day
------------------------------------------------------------
```

E non poteva essere diversamente! La **concordanza** dei valori fino all' ultima cifra decimale (la decima) è dovuta chiaramente al fatto che in entrambi i casi si sono usati gli stessi termini periodici delle serie.

9 Conclusioni

Lo studio delle *effemeridi planetarie* ha sempre affascinato gli appassionati di astronomia. Molti di loro, nella prassi ordinaria, si accontentano della determinazione della sola posizione di ciascun corpo. Spero che questo lavoro, che sfrutta gli affinatissimi algoritmi della teoria VSOP87, possa essere di loro ausilio per arrivare alla conoscenza *completa* del moto planetario. Un possibile e ulteriore sviluppo di questa ricerca potrebbe essere lo studio dell'*evoluzione planetaria* nel medio e lungo periodo. *(01 Nov.02)*

Riferimenti bibliografici

[1] P.Bretagnon, G.Francou **Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP solutions** - Astronomy and Astrophysics 202, 309-315 (1988)

[2] Sito da cui prelevare i termini periodici delle serie di Poisson
ftp://ftp.imcce.fr/pub/ephem/planets/vsop87/