# La Teoria Lunare ELP 2000-82B di Michelle e Jean Chapront risolta con 37872 termini delle serie

Giuseppe Matarazzo

Luglio 2003

**Sommario**

Da quando l'utilizzo dei numerosissimi termini correttivi necessari al calcolo delle effemeridi lunari di precisione è disponibile via internet presso appositi FTP server, il complesso *moto perturbato* della Luna può essere affrontato da qualsiasi studioso. Per il calcolo delle 3 coordinate sferiche $(\lambda, \beta, r)$ viene applicata la teoria ELP 200-82B, sviluppata presso il Bureau des Longitudes di Parigi dai coniugi Chapront. Usando tutti i 37872 termini delle serie di Poisson e Fourier, che i moderni personal computer elaborano in una frazione di secondo, il BdL garantisce, per epoche comprese tra il 1950 e il 2050, precisioni di calcolo non superiori a 0.015" in longitudine, 0.0043" in latitudine e 17.3 metri nella distanza Terra-Luna.

## 1 Premessa

In questo lavoro è descritta una semplice procedura per impostare un programma al computer che con 5 subroutines determina un'effemeride lunare di grande precisione.

La *Lunar Solution ELP 2000-82B* si avvale di 36 file-dati, 12 per ogni coordinata $(\lambda, \beta, r)$, in cui sono depositati i circa 40mila termini correttivi del moto lunare e coinvolge la teoria semi-analitica ELP 2000-82, le costanti dell'effemeride ELP 2000 adattate (*fitted*) all'integrazione numerica DE200/LE200 del Jet Propulsion Laboratory (JPL di Pasadena) e gli argomenti angolari della teoria semi-analitica ELP 2000-85.

Gli autori sono i coniugi francesi Michelle Chapront-Touzé e Jean Chapront del BdL. L'acronimo ELP sta per *Effemeridi Lunari Parigine*, dedicate alla città dove ha sede il Bureau des Longitudes.

## 2 Analisi del problema

Le coordinate sferiche della Luna $(\lambda, \beta, r)$ sono riferite all'eclittica media dinamica (inerziale) e all' equinozio medio della data. Si tratta di coordinate *geometriche* aventi come origine il centro della Terra, piano di riferimento l'eclittica, tempi *dinamici* espressi in TDT e distanze in chilometri.

I files contenenti i termini delle serie sono i seguenti:

```
---------------------------------------------------
  Long.  Latit. Dist.     Tipo di sommatoria
---------------------------------------------------
  GM01   GM02   GM03      Main Problem
  GM04   GM05   GM06      Earth Figure Perturb.
  GM07   GM08   GM09      Earth Figure Perturb./t
  GM10   GM11   GM12      Planetary Perturb.-Tab.1
  GM13   GM14   GM15      Planetary Perturb.-Tab.1/t
  GM16   GM17   GM18      Planetary Perturb.-Tab.2
  GM19   GM20   GM21      Planetary Perturb.-Tab.2/t
  GM22   GM23   GM24      Effetti marea
  GM25   GM26   GM27      Effetti marea/t
  GM28   GM29   GM30      Moon Figure Perturb.
  GM31   GM32   GM33      Relativistic Perturb.
  GM34   GM35   GM36      Solar eccentricity/t^2
---------------------------------------------------
20,560  7,684  9,628      Totale = 37,872 termini
---------------------------------------------------
```

Si inizia calcolando il tempo $t$ dell'effemeride, espresso in secoli giuliani, a partire dall'epoca J2000

$$t = \frac{JD - 24\,51545.0}{36\,525}$$

essendo JD il giorno giuliano della data in TDT (Tempo Dinamico Terrestre)

Le sommatorie r(1), r(2), r(3) dei termini principali e periodici sono funzioni di $t$ e permettono di determinare le coordinate della Luna:

| | | |
|---|---|---|
| Longitudine: | $\lambda = (W_1 + p_A) + r(1)$ | (arcsec) |
| Latitudine: | $\beta = r(2)$ | (arcsec) |
| Distanza: | $r = r(3)$ | (km) |

dove $(W_1 + p_A)$ è la *longitudine media lunare*, che equivale alla somma della media della longitudine media $W_1$ e della *precessione* $p_A$. Entrambe le variabili verranno definite più avanti nell'apposita tabella.

## 3 Calcolo delle serie

Le sommatorie dei termini principali e periodici sono raggruppate in 5 distinte tipologie, ciascuna delle quali interessa le 3 coordinate lunari:

- Problema Principale (Main Problem)
- Perturbazioni di forma del geoide terrestre (Earth Figure Perturb.)
- Perturbazioni planetarie - Table 1
- Perturbazioni planetarie - Table 2
- Effetti di marea, relativistici, perturbazioni di forma della Luna e dell'eccentricità solare

La formulazione generale del 1° gruppo (*Main Problem*), che riguarda i files GM01, GM02, GM03, è la seguente:

$$var = \sum A \,{}^{\sin}_{\cos}\, (i_1 D + i_2 l' + i_3 l + i_4 F)$$

essendo:
$(D, l', l, F)$ le *variabili di Delaunay* che verranno definite in seguito e $(i_1, i_2, i_3, i_4)$ i loro moltiplicatori.

Il carattere tipografico ${}^{\sin}_{\cos}$ sta ad indicare che la funzione circolare da usare è il seno per il calcolo di longitudine e latitudine, e il coseno per la distanza. In ogni riga dei 3 file-dati sono elencati in totale 5 coefficienti, come nell'esempio che segue:

```
      i1      i2      i3      i4            A
      0       0       0       2       -411.59567
      .........................................
  con:
        A espresso in arco-secondi per long. e lat.
        A    "       " chilometri    "  la distanza
```

Nel programma FORTRAN è presente la subroutine 1 che legge nell'ordine i 4 moltiplicatori degli angoli di Delaunay e il coefficiente A dei tre files suddetti. Le variabili di accumulo, che interessano sia questa che tutte le altre subroutines, sono rispettivamente r(1), r(2), r(3); con un apposito comando (*if..then*) si aggiunge il valore $\frac{\pi}{2}$ all'argomento in modo da trasformare il seno in coseno e determinare r(3).

Per quanto riguarda il 2° gruppo di dati (*Earth Figure Perturbations*), in ogni riga sono riportati 7 valori, costituiti da 5 moltiplicatori, dall'angolo di fase $\phi$ e dal solito coefficiente A. La formula generale è:

$$var = \sum A \, \sin\left(i_1\zeta + i_2\overline{D} + i_3\overline{l'} + i_4\overline{l} + i_5\overline{F} + \phi\right)$$

La sopra-segnatura delle variabili $(D, l, l', F)$ sta ad indicare che di esse va considerata solo la parte *lineare*, vale a dire quella che all'angolo iniziale somma solo il termine di primo grado $t$.
La prima variabile è $\zeta = W_1 + p \cdot t$ ed i suoi componenti verranno definiti più avanti.
Questo gruppo è composto di due sottogruppi: i dati di GM04, GM05, GM06, i cui coefficienti A sono quelli effettivamente letti nei files, e i dati di GM07, GM08, GM09 nei quali i coefficienti A vanno moltiplicati per $t$. Nell'apposita subroutine del Fortran un semplice *flag* attivato provvede all'operazione di moltiplicazione per $t$.

Il 3° gruppo comprende le perturbazioni planetarie della teoria ELP 2000-82B ed è anch'esso suddiviso in 2 sottogruppi, quello con A invariati (GM10, GM11, GM12) e l'altro con A moltiplicati per $t$ (GM13, GM14, GM15). Le perturbazioni riguardano tutti i pianeti da Mercurio a Nettuno e le loro *longitudini medie*, anch'esse bloccate al termine lineare in $t$, sono moltiplicate per i rispettivi coefficienti interi letti in ogni riga del file.
Le 3 coordinate si calcolano con sommatorie del tipo:

$$\begin{aligned} var = \textstyle\sum A \, \sin\big(&i_1M_e + i_2V + 1_3\overline{T} + i_4M_a + i_5J + i_6S + i_7U + i_8N + \\ &{}_{19}\overline{D} + i_{10}\overline{l} + i_{11}\overline{F} + \phi\big) \end{aligned}$$

Questa volta le variabili linearizzate di Delaunay sono tre $(\overline{D}, \overline{l}, \overline{F})$, c'è anche qui la fase $\phi$ e le longitudini medie, definite più avanti, riguardano i pianeti: Me=Mercurio, V=Venere, T=Terra, Ma=Marte, J=Giove, S=Saturno, U=Urano, N=Nettuno.

Analogo procedimento si ripete per il 4° gruppo (*Planetary Perturbations - Table 2*) anch'esso suddiviso nei due sottogruppi con A (GM16, GM17, GM18) e A$\cdot t$ (GM19, GM20, GM21). La formulazione generale delle sommatorie cambia leggermente in quanto riappare l'angolo $l'$ e non c'è il contributo della perturbazione di Nettuno:

$$var = \sum A\ \sin\left(i_1 M_e + i_2 V + 1_3\overline{T} + i_4 M_a + i_5 J + i_6 S + i_7 U + \right.$$
$$\left. 1_8\overline{D} + i_9\overline{l'} + i_{10}\overline{l} + i_{11}\overline{F} + \phi\right)$$

Il 5° e ultimo gruppo interessa perturbazioni diverse e di entità minore rispetto alle precedenti. I files GM22, GM23, GM24 riguardano gli effetti di marea con i coefficienti A invariati, mentre in GM25, GM26, GM27 i coefficienti A vanno moltiplicati per $t$. Le perturbazioni di forma della Luna sono inserite nei files GM28, GM29, GM30 e quelle relativistiche in GM31, GM32, GM33. Infine le perturbazioni per effetto della variazione di eccentricità dell'orbita apparente del Sole sono nei files GM34, GM35, GM36 e tutti i coefficienti A vanno moltiplicati per $t^2$. La formulazione generale è:

$$var = \sum A\ \sin\left(\overline{D} + i_3\overline{l'} + i_4\overline{l} + i_5\overline{F} + \phi\right)$$

# 4 Tabella delle variabili e gli angoli di Delaunay

La precessione $p_a$ è quella che si accumula tra l'epoca J2000 e la data dell'effemeride.

$W_1$ è la *media* della longitudine media della Luna, $W_2$ la longitudine media del perigeo e $W_3$ la longitudine media del nodo ascendente. $T$ è la media della longitudine media eliocentrica del baricentro Terra-Luna, mentre $\varpi'$ rappresenta la longitudine media del perielio del baricentro Terra-Luna.

Tutti gli angoli, ad eccezione di quelli della colonna $a$, sono espressi in *arco-secondi* e si calcolano con la formula ricorsiva polinomiale:

$$var = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4$$

| | a | | | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | o | ' | " | | | | |
| W1 | 218 | 18 | 59.95571 | 1732559343.73604 | -5.8883 | 0.006604 | -0.00003169 |
| W2 | 83 | 21 | 11.67475 | 14643420.2632 | -38.2776 | 0.045047 | 0.00021301 |
| W3 | 125 | 02 | 40.39816 | -6967919.3622 | 6.3622 | 0.007625 | -0.00003586 |
| T | 100 | 27 | 59.22059 | 129597742.2758 | -0.0202 | 0.000009 | 0.00000015 |
| w' | 102 | 56 | 14.42753 | 1161.2283 | 0.5327 | -0.000138 | 0 |
| pA | 0 | | | 5029.0966 | 1.1120 | 0.000077 | -0.00002353 |

Gli *angoli di Delaunay* si ricavano con le formule:

$$\begin{cases} D = W_1 - T + 180^\circ \\ l' = T - \varpi' \\ l = W_1 - W_2 \\ F = W_1 - W_3 \end{cases}$$

Essi indicano rispettivamente l'elongazione media della Luna, l'anomalia media del Sole, quella della Luna e l'argomento della latitudine (distanza media della Luna dal suo nodo ascendente $\Omega$).

Con la tabella seguente si determinano le longitudini medie dei pianeti, linearizzate al primo grado di $t$; la loro formulazione generale è $var = a + bt$.

| | a (o ' ") | b (arcsec) |
|---|---|---|
| Me | 252 15 03.25986 | 538101628.68898 |
| V | 181 58 47.28305 | 210664136.43355 |
| T | 100 27 59.22059 | 129597742.27580 |
| Ma | 355 25 59.78866 | 68905077.59284 |
| J | 34 21 05.34212 | 10925660.42861 |
| S | 50 04 38.89694 | 4399609.65932 |
| U | 314 03 18.01841 | 1542481.19393 |
| N | 304 20 55.19575 | 786550.32074 |

# 5 Esempio di una recente lunazione

Le effemeridi sono riportate a intervalli di 5 giorni.

| Data TDT ora 0.00 | Long. o ' " | Latit. o ' " | Distanza km |
|---|---|---|---|
| 1 7 2003 | 112 58 05.827 | +04 10 58.305 | 392,484.617 |
| 6 7 2003 | 179 13 31.483 | +04 26 00.680 | 375,374.341 |
| 11 7 2003 | 250 24 05.374 | -01 03 49.907 | 365,148.789 |
| 16 7 2003 | 321 29 28.995 | -05 03 53.104 | 380,248.404 |
| 21 7 2003 | 24 38 18.360 | -02 46 50.240 | 402,248.107 |
| 26 7 2003 | 84 10 32.793 | +02 17 00.584 | 398,787.152 |
| 31 7 2003 | 148 36 41.204 | +05 01 51.899 | 380,393.138 |

# 6 Accuratezza dei risultati

E’ indicata nella tabella 3 del recente lavoro di J.Chapront e G.Francou, *The lunar theory ELP revisited. Introduction of new planetary perturbations*, Astronomy and Astrophysics 404, 735-742 (2003).

Per epoche comprese tra +1950 e +2060 la differenza massima tra la teoria ELP tradizionale e l’integratore numerico DE405 del JPL è di 0.015” in longitudine, 0.0043” in latitudine e 17.3 metri nella distanza.

Per intervalli più ampi, tra -3000 e +2500, il confronto con l’altro integratore DE406 presenta una tolleranza non superiore a 35” in longitudine, 4.1” in latitudine e 7.7 km nella distanza.

# 7 Conclusione

Lo studioso potrà usare queste effemeridi come punto di partenza per successivi sviluppi, introducendo le correzioni per aberrazione e nutazione e passare quindi al calcolo tradizionale delle coordinate *apparenti* $(AR, \delta)$ della Luna. Con i noti algoritmi per la determinazione della *matrice di precessione* egli può riferire le coordinate lunari all’equinozio medio J2000, trasferirsi dall’eclittica media all’equatore medio J2000 e calcolare, per impieghi di tipo astrometrico, le coordinate rettangolari riferite all’equatore FK5. La grande precisione dei risultati rimane invariata.

# 8 Appendice

Ho chiesto allo scienziato francese un parere sulla possibilità che le tolleranze di *Lunar Solution ELP 2000-82B* fossero in realtà ancora migliori di quanto pubblicato nella Table 3, per il motivo che essa usa potenze di $t$ del quarto ordine superiori al secondo ordine delle ELP considerate nel suo recente articolo. Ecco la risposta; i capoversi con (>) si riferiscono alla mia domanda.

```
            Oggetto : Re: Table 3 of your recent work

               Data : Tue,  8 Jul 2003 14:57:33 +0200
Bonjour,

>    Could you be kind enough to let me know, as completion of
>    table 3, the tolerances of your theory "Lunar Solution
>    ELP 2000-82B"?
>
```

```
>    The K-max of Poisson series of such theory is 4 instead
>    of 2, as shown on ELP(c) of table 2; so it could be expected
>    better results.
>

You are right: We could expect better results on the long range.
But unfortunately, it not the case. The improvements are mainly
sensible over few centuries as explained in  3.2. Nevertheless
several arguments with long period are noticeably improved but it
is not sufficient to increase the global precision.

Sincerely,

-------------------------------
Jean CHAPRONT
SYRTE - Observatoire de Paris
-------------------------------
```

In sintesi, restano confermate le tolleranze esposte nel capitolo 6. *(..fine)*