Le COSTANTI ASTRODINAMICHE
e il loro facile utilizzo nei calcoli astronomici

Giuseppe Matarazzo

Aprile 2004

Sommario

Questa memoria è divisa in due parti. Nella prima vengono elencate tutte le *costanti* che hanno un uso pratico immediato in meccanica celeste, mentre nella seconda sono esposti alcuni *esempi manuali* che mostrano la loro versatilità applicativa.

1 Introduzione

Chi studia per la prima volta la meccanica classica, quella newtoniana per intenderci, e vuole effettuare qualche calcolo pratico, si trova immediatamente un **muro** costituito dalle unità di misura del sistema MKS (metro-chilogrammo-secondo) che poco si adattano alle *dimensioni* astronomiche. E' infatti arduo maneggiare continuamente grandezze come, per esempio, la costante gravitazionale di Newton $G = 6.672 \cdot 10^{-11}$ e la massa del Sole $M = 1.989 \cdot 10^{30}$, e ritrovarseli sempre in mezzo ai calcoli di accelerazioni e velocità.

Scopo di questo lavoro è quello di *riepilogare* solo quelle **costanti** che servono a snellire i calcoli astronomici e di riflesso gli algoritmi da inserire nei programmi al computer.

2 Le grandezze fondamentali

Nei moti di corpi celesti aventi il Sole come *centro gravitazionale* la prima grandezza da prendere in considerazione è l'*unità astronomica* UA, pari alla distanza media della Terra dal Sole:

$$\boxed{UA \;=\; 149\,597\,870 \; km \qquad (1)}$$

La seconda grandezza, introdotta dal grande genio tedesco *Friedrick Gauss* qualche secolo fa, è la costante k, detta appunto **gaussiana**, uguale a:

$$\boxed{k \;=\; 0.017\,202\,098\,95 \; UA/giorno \qquad (2)}$$

e rappresenta la velocità media della Terra attorno al Sole, che espressa in km/s diventa

$$\boxed{UV_0 \;=\; 29.784\,691\,695 \; km/s \;= k \qquad (3)}$$

e costituirà una prossima grandezza di riferimento.

Dalla (2) si ricava l'importantissimo **parametro gravitazionale** μ, ossia il prodotto tra la costante gravitazionale di Newton G e la massa del Sole M, e vale:

$$\boxed{\mu \;=\; k^2 \;=\; 2.959\,122\,082\,856 \cdot 10^{-4} \; UA^3/giorno^2 \;=\; 1.327\,124\,381\,79 \cdot 10^{11} \; km^3/s^2 \qquad (4)}$$

3 Le unità normalizzate o canoniche: $\mu = 1$

Al primo approccio la (4) sembrerebbe incongruente dal punto di vista dimensionale, in quanto $[\mu]$ $(=k^2)$ dovrebbe essere espresso in $[UA^2/giorno^2]$. In effetti, con l'introduzione di k, si è scelta una misura *normalizzata* delle distanze pari a 1 UA, per cui $[\mu]$ $(=k^2 \cdot UA)$ ha le dimensioni di $[UA^3/giorno^2]$.

Da Newton sappiamo che in un moto kepleriano l'unica accelerazione possibile, quella *radiale*, è diretta verso il centro di massa ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra il corpo e il centro. Il fattore di proporzionalità è il termine ($\frac{c^2}{p} = \mu$), essendo c il doppio della velocità areolare del corpo P (2^a legge di Keplero) e p il parametro dell'orbita ellittica di semiassi (a, b). Se l'ellisse viene percorsa nel tempo T (periodo orbitale), la sua area vale πab, per cui $c = \frac{2\pi ab}{T}$; sappiamo inoltre che $p = \frac{b^2}{a}$ e quindi il termine di proporzionalità diventa:

$$\frac{c^2}{p} = \mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = costante \qquad (5)$$

nella quale si riconosce la 3^a legge di Keplero, 'corretta' da Newton con l'introduzione del parametro gravitazionale μ=GM.

Manipoliamo allora la (5) e la scriviamo in questa forma:

$$\mu = \frac{a^3}{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = k^2 \qquad (6)$$

Se poniamo $a = 1$ UA, il parametro gravitazionale diventa unitario ($\mu = 1$) quando

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{1}{k} \qquad (7)$$

Quindi otteniamo la grande **semplificazione** di $\mu = 1$ se usiamo l'accortezza di scegliere come *unità di tempo* la seguente grandezza:

$$\boxed{UT_0 = \frac{1}{k} = 58.132\,440\,867 \; giorni \qquad (8)}$$

Le formule (1), (3), (8) sono dette **unità normalizzate** o **canoniche** del *sistema solare.*

Dalla (7) si ricava pure il *periodo di rivoluzione* T_0 della Terra intorno al Sole (*anno gaussiano*), che differisce da quello *siderale* di circa 46.2 s, dovuti alla migliore determinazione attuale della velocità della Terra rispetto a quella effettuata da Gauss. Ciononondimeno, per volontà degli astronomi contemporanei, la (2) rimane la grandezza fondamentale dei calcoli astrodinamici relativi al sistema solare.

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{k} = 365.256\,898\,326 \; giorni \qquad (9)}$$

4 Sistema di riferimento terrestre

Analizziamo adesso il caso della Terra come *centro* gravitazionale. E' nota la sua *massa inversa*, ossia di quante volte è più piccola rispetto a quella del Sole: $m_{inv} = 332\,946$, e quindi dalla (4) si ricava il *parametro gravitazionale terrestre* μ_t:

$$\boxed{\mu_t = \frac{1.327\,124\,381\,79 \cdot 10^{11}}{332\,946} = 398\,600.5 \; km^3/s^2 \qquad (10)}$$

Anche qui si può procedere attraverso le *unità canoniche.* Assumiamo come unità di lunghezza il raggio equatoriale della Terra R (supposta sferica):

$$\boxed{DU \;=\; R \;=\; 6\,378.140\; km \qquad (11)}$$

L'*unità di tempo* si determina applicando la (6):

$$\frac{T}{2\pi} = R \cdot \sqrt{\frac{R}{\mu_t}} \qquad (12)$$

e si ottiene:

$$\boxed{TU \;=\; \tfrac{T}{2\pi} \;=\; 806.811\,634\,148\; s \qquad (13)}$$

e di conseguenza l'*unità di velocità* diventa:

$$\boxed{DV \;=\; \tfrac{DU}{TU} \;=\; 7.905\,364\,437\; km/s \qquad (14)}$$

A questo stesso risultato si arriva considerando il moto circolare uniforme di un satellite ideale che percorra un'orbita terrestre: $V^2 \cdot R = \mu_t$, ovvero $V = \sqrt{\frac{\mu_t}{R}}$, da cui la (14).

Riepilogando, anche nel sistema gravitazionale terrestre si possono applicare con facilità le **unità canoniche**, rappresentate dalle (11), (13) e (14), con $\boxed{\mu_t = 1}$.

Infine, per ragioni di uniformità con il sistema solare e quindi con gli algoritmi da trasferire nei programmi computerizzati, potrebbe essere interessante avere a disposizione una costante 'gaussiana' terrestre (k_t), che si ricava tramite la (8) e la (13): $k_t \;=\; \frac{1}{TU} \;=\; 0.001\,239\,446\,678$.

5 Esempi applicativi (sistema solare)

Da notare la maneggevolezza dei calcoli dovuta all'utilizzo delle unità canoniche.

5.1

Determinare il periodo di rivoluzione **T** di un corpo celeste di semiasse maggiore $a = 2.015$ UA.

Dalla (6) si ricava: $T = \frac{2\pi}{k} \cdot a^{\frac{3}{2}} = T_0 \cdot a\sqrt{a} = 365.256\,898 \cdot 2.015\sqrt{2.015}$= 1044.74669 giorni.

5.2

Calcolare la velocità *perielia* di Mercurio, noti a=0.3871 UA ed e=0.2056.

La distanza al perielio in un'orbita ellittica è: $r_p = a(1-e) = 0.3871 \cdot (1 - 0.2056) = 0.307\,512$. Applicando l'unità normalizzata (3), $UV_0 = 29.784\,691\,695\, km/s$, e il principio di conservazione dell'energia, otteniamo:

$$V = \sqrt{\mu \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{1 \cdot \left(\frac{2}{0.307512} - \frac{1}{0.3871}\right)} = 1.980\,024 \cdot UV_0 = 58.9744\; km/s$$

5.3

In un punto di un'orbita conica sono noti il raggio vettore $r = 49.6 \cdot 10^6\; km$, la velocità $V = 55.3\; km/s$ e l'angolo $\eta = 81^\circ.539$ che la velocità forma con il prolungamento del raggio r. Calcolare il semiasse maggiore e l'eccentricità.

(r, V) in unità canoniche si ottengono dividendo rispettivamente i valori dati per UA e per UV_0, e diventano r=0.331 555 e V=1.856 658. Dalla formula $V^2 = \mu(2/r - 1/a)$ del principio di conservazione dell'energia, ricaviamo:

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}\right) = \left(\frac{2}{0.331555} - \frac{1.856658^2}{1}\right) = 2.585\,002\,76$$

da cui $\boxed{\text{a=0.386 847 UA}}$.

Per il calcolo dell'eccentricità si applica la (5): $\frac{c^2}{p} = \mu$, cioè $p = c^2$, essendo $\mu = 1$. La velocità areolare è nota dai dati del problema, $c = r \cdot V \cdot \sin\eta$ mentre il parametro orbitale vale $p = a \cdot (1 - e^2)$, da cui si desume l'eccentricità e.

Passando ai valori numerici si ottiene: c=0.331 555 · 1.856 658 · 0.989 116 = 0.608 884 e quindi

$$e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a}} = \sqrt{1 - \frac{0.608\,884^2}{0.386\,847}} = 0.204\,005$$

6 Esempi applicativi (sistema geocentrico)

In questo caso la scelta (o meno) delle unità *normalizzate* dipende dalle predilezioni di chi effettua i calcoli, che può usare $\mu = 1$ oppure $\mu = 398\,600.5\ km^3/s^2$. Con la Terra, le grandezze in gioco sono meglio 'percettibili' ed è quindi meno evidente il vantaggio delle misure *canoniche*. Nel primo esempio che segue mostriamo entrambe le opzioni.

6.1

Un satellite artificiale ruota attorno alla Terra (supposta sferica) percorrendo un'orbita che ha come altezze minima e massima al suolo, rispettivamente 200 e 350 km. Determinarne i parametri (a,e) ed il tempo di percorrenza del tratto orbitale di anomalia $\theta = 150°$.

Calcoli preliminari. R=DU=6378.14 km; distanza al perigeo = R+200; distanza all'apogeo = R+350. Il semiasse maggiore è la semisomma di queste due distanze mentre l'eccentricità è il rapporto tra la loro differenza e la loro somma. Quindi con $r_p = 6578.14\,km$ e $r_a = 6728.14\,km$ otteniamo:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = 6653.14\ km\ =\ 1.043\,116\ DU \qquad\qquad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0.011\,272\,872$$

Il tempo per percorrere l'arco assegnato vale $t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot k_1$, essendo k_1 [1] una grandezza adimensionale, funzione di (e) e di θ, che con i nostri dati vale 2.606 693 55. Avremo allora:

a) Metodo tradizionale:
$t = \sqrt{\frac{6653.14^3}{398\,600.5}} \cdot k_1 = 2240.5\ s$

b) Metodo unità normalizzate:
$t = \sqrt{\frac{1.043\,116^3}{1}} \cdot k_1 \cdot TU = 2240.5\ s$

6.2

La sonda Galileo, lanciata dalla NASA nel 1989, aveva i seguenti parametri della traiettoria *iperbolica* di partenza: $a = 25\,844.8\ km$ ed $e = 1.263\,746$. Calcolare la sua velocità V_∞ al momento della satellizzazione, quando diventa nulla l'influenza gravitazionale terrestre.

Raggio al perigeo:
$r_0 = a \cdot (e - 1) = 25\,844.8 \cdot 0.263\,746 \cdot DU\ =\ 1.068\,723$

Velocità al perigeo:
$V_0^2 = \frac{\mu}{r_0} = \frac{1}{r_0}\ =\ 0.935\,696$

[1] In un moto ellittico è: $k_1 = \left[\arccos\left(\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right) - \frac{\sqrt{1-e^2}\cdot e \cdot \sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]$

Calcolo di V_∞:
$V_\infty^2 = (e-1) \cdot V_0^2 \ = 0.263\,746 \cdot 0.935\,696 \ = \ 0.246\,796$, da cui si ottiene:
$V_\infty = 0.496\,776 \cdot DV = 0.496\,776 \cdot 7.905\,364 \ = \ 3.927 \ km/s$.

6.3

Meteora. Le lastre fotografiche dello stesso oggetto, ripreso da due diverse località, hanno permesso di stabilire i parametri orbitali geocentrici del meteoroide che l'ha generata. Essi sono $a = 116 \ km$ ed $e = 46.115\,72$. Trovare la velocità V_∞ del corpo al limite della sfera d'influenza terrestre.

Il raggio al perigeo vale $r_0 = a(e-1) = \frac{116}{6378.14} \cdot 45.115\,72 \ = \ 0.820\,525$

Ponendo $V_0^2 = \frac{\mu}{r_0}$ nella formula dell'esercizio precedente, si ottiene:

$$V_\infty^2 = \frac{\mu \cdot (e-1)}{r_0} = \frac{1 \cdot 45.115\,72}{0.820\,525} = 54.983\,965$$

da cui $V_\infty = 7.415\,117 \cdot DV = 7.415\,117 \cdot 7.905\,364 \ = \ 58.619 \ km/s$

... Fine ...