# Coordinate Geografiche di una Località noti gli Angoli Orizzontali di Tre Stelle

Giuseppe Matarazzo

Ottobre 2004

**Sommario**

Questo metodo si basa sulla soluzione numerica di un sistema di equazioni non lineari (3x3) senza l'utilizzo di misure d'altezza delle stelle, che richiedono correzioni per la rifrazione atmosferica. Qui invece basta effettuare tre *letture al cerchio orizzontale* del teodolite collimando tre stelle di note (AR,$\delta$) e annotando i rispettivi tempi di rilevamento.

## 1 Introduzione

La presente memoria tecnica nasce come *variante* al metodo di calcolo usato da geografi e topografi della passata generazione, i quali, pur disponendo di strumenti di ottima precisione (teodoliti con sensibilità di lettura di 1$''$ e cronometri di circa 0,5 sec), non potevano giovarsi di elaboratori elettronici per uno sviluppo più raffinato degli algoritmi di calcolo; la scelta del tipo di osservazione astronomica era pertanto vincolata all'uso di un metodo semplice di calcolo.

Per la risoluzione del problema proposto (ricerca di $\lambda$ e $\phi$ di un punto della Terra) si adottava comunemente il metodo grafico delle rette d'altezza, essendo note, in determinati istanti, le misure delle altezze di due astri sull'orizzonte. Prima dello sviluppo dei calcoli, le misure *grezze* delle altezze dovevano essere depurate del valore della rifrazione atmosferica, variabile sensibilmente in funzione della temperatura esterna e della pressione dell'aria.

L'algoritmo esposto fa invece riferimento a misure **orizzontali** (non affette da rifrazione) rilevate con strumenti analoghi ma *processate* con un programma computerizzato.

Dal punto di vista operativo risulta evidente che con questo metodo occorrono 3 misure di angoli orizzontali (e non 2 come per le rette d'altezza), visto che conviene prescindere dalla conoscenza della posizione del meridiano (nord geografico). Ciò rende molto *facili* le operazioni di rilevamento, che possono iniziare subito dopo aver posto in verticale lo strumento e senza stare a preoccuparsi della corretta individuazione del meridiano locale.

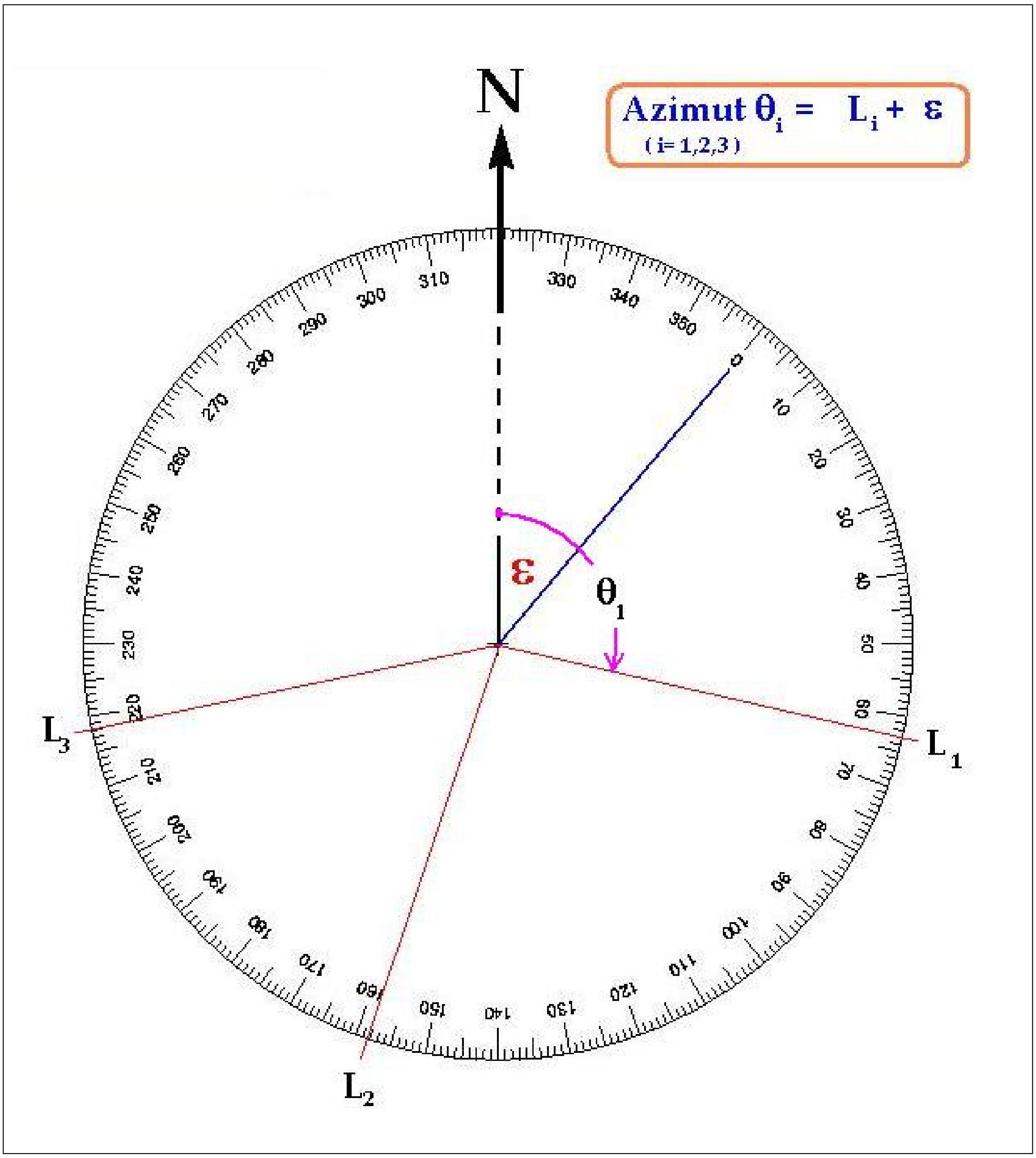


Figura 1: Azimut e Angoli Orizzontali delle 3 stelle

## 2 Metodo di calcolo

Si prende in considerazione la nota formula di trigonometria sferica che lega l'azimut $\theta$ di un astro al suo angolo orario $H$, alla declinazione $\delta$ e alla latitudine $\phi$.

$$\tan\theta = \frac{\sin H}{\cos H \sin\phi - \tan\delta\cos\phi} \tag{1}$$

Come si vede dalla figura, che schematizza il cerchio orizzontale di un teodolite, la relazione che intercorre tra l'azimut di un astro e il relativo angolo orizzontale $l$ è:

$$\theta = l + \epsilon$$

mentre l'*angolo orario* vale:

$$H = \lambda + TSMG - AR = \lambda + s$$

dove $s$ è la differenza tra il Tempo Siderale Medio di Greenwich $TSMG$, noto a partire dal tempo $t$ di rilevamento, e l'ascensione retta $AR$ ed è costante per ogni osservazione.

Nelle suddette formule $\lambda$ indica la *Longitudine Est* della postazione topografica, $\phi$ la sua *Latitudine Nord* ed $\epsilon$ l'azimut dell'origine della graduazione del cerchio orizzontale. Queste sono le **tre** incognite del problema, l'ultima delle quali, a soluzione ottenuta, diventa superflua.

I termini noti sono la lettura al cerchio orizzontale del teodolite $l$, la grandezza $s$ specificata sopra e l'altra costante $t$ pari alla tangente della declinazione $\delta$, ossia $t = \tan\delta$.

La (1) diventa quindi:

$$\tan(l + \epsilon) = \frac{\sin(\lambda + s)}{\cos(\lambda + s)\sin\phi - t\cos\phi} \tag{2}$$

che in *forma implicita* si può esprimere mediante una funzione F nelle 3 incognite $\lambda, \phi, \epsilon$, vale a dire con:

$$F(\lambda, \phi, \epsilon) = \sin(\lambda + s) - \tan(l + \epsilon)\cos(\lambda + s)\sin\phi + \tan(l + \epsilon)\cdot t\cos\phi = 0 \tag{3}$$

Introducendo nella (3) i termini noti ricavati dalle osservazioni e dalle effemeridi, si ottiene il seguente sistema di **3 equazioni trascendenti** *NON* lineari:

$$\begin{cases} F_1 = & \sin(\lambda + s_1) - \tan(l_1 + \epsilon)\cos(\lambda + s_1)\sin\phi + \tan(l_1 + \epsilon)\cdot t_1\cos\phi = & 0 \\ F_2 = & \sin(\lambda + s_2) - \tan(l_2 + \epsilon)\cos(\lambda + s_2)\sin\phi + \tan(l_2 + \epsilon)\cdot t_2\cos\phi = & 0 \\ F_3 = & \sin(\lambda + s_3) - \tan(l_3 + \epsilon)\cos(\lambda + s_3)\sin\phi + \tan(l_3 + \epsilon)\cdot t_3\cos\phi = & 0 \end{cases} \tag{4}$$

Questo sistema si risolve applicando il metodo di ricerca delle soluzioni per successive approssimazioni di Newton-Raphson.

In forma matriciale il sistema (4) può essere scritto così:

$$F(\vec{X}) = 0$$

essendo $X_1 = \lambda$, $X_2 = \phi$, $X_3 = \epsilon$ le incognite e $F_1$, $F_2$, $F_3$ i valori della funzione.

Per la risoluzione del sistema occorre definire la matrice di Jacobi $W(\vec{X})$, che esplicitiamo sotto, e calcolarne la sua inversa $W(\vec{X})^{-1}$.

$$W(\vec{X}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial\lambda} & \frac{\partial F_1}{\partial\phi} & \frac{\partial F_1}{\partial\epsilon} \\ \frac{\partial F_2}{\partial\lambda} & \frac{\partial F_2}{\partial\phi} & \frac{\partial F_2}{\partial\epsilon} \\ \frac{\partial F_3}{\partial\lambda} & \frac{\partial F_3}{\partial\phi} & \frac{\partial F_3}{\partial\epsilon} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

La formula ricorrente per la determinazione delle incognite $X_i$ è:

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i - W(\vec{X}_i)^{-1}\cdot F(\vec{X}_i) \tag{6}$$

mentre le 9 derivate parziali della matrice $\vec{W}(X)$ si calcolano come mostrato di seguito:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} = & \cos(\lambda + s_1) + \tan(\epsilon + l_1)\sin(\lambda + s_1)\sin\phi = & F_{11} \\
\frac{\partial F_2}{\partial \lambda} = & \cos(\lambda + s_2) + \tan(\epsilon + l_2)\sin(\lambda + s_2)\sin\phi = & F_{21} \\
\frac{\partial F_3}{\partial \lambda} = & \cos(\lambda + s_3) + \tan(\epsilon + l_3)\sin(\lambda + s_3)\sin\phi = & F_{31} \\
\\
\frac{\partial F_1}{\partial \phi} = & -\tan(\epsilon + l_1)\cdot[\cos(\lambda + s_1)\cos\phi + t_1\sin\phi] = & F_{12} \\
\frac{\partial F_2}{\partial \phi} = & -\tan(\epsilon + l_2)\cdot[\cos(\lambda + s_2)\cos\phi + t_2\sin\phi] = & F_{22} \\
\frac{\partial F_3}{\partial \phi} = & -\tan(\epsilon + l_3)\cdot[\cos(\lambda + s_3)\cos\phi + t_3\sin\phi] = & F_{32} \\
\\
\frac{\partial F_1}{\partial \epsilon} = & [1 + \tan^2(\epsilon + l_1)]\cdot[t_1\cos\phi - \cos(\lambda + s_1)\sin\phi] = & F_{13} \\
\frac{\partial F_2}{\partial \epsilon} = & [1 + \tan^2(\epsilon + l_2)]\cdot[t_2\cos\phi - \cos(\lambda + s_2)\sin\phi] = & F_{23} \\
\frac{\partial F_3}{\partial \epsilon} = & [1 + \tan^2(\epsilon + l_3)]\cdot[t_3\cos\phi - \cos(\lambda + s_3)\sin\phi] = & F_{33}
\end{cases}
$$

Nel capitolo successivo è riportato il programma in linguaggio BASIC che risolve egregiamente, e in una frazione di secondo, l'algoritmo esposto.

# 3 Listato BASIC

Ecco alcune note di commento.

Nella parte iniziale si introducono i dati del problema, cioè i 9 termini noti ricavati dalle osservazioni e dalle effemeridi ed i valori iniziali di $\lambda, \phi, \epsilon$. Poichè il metodo converge molto rapidamente, questi ultimi si possono scostare di parecchi gradi da quelli reali; naturalmente senza esagerare, specialmente su $\lambda$ e $\phi$, altrimenti si può incorrere in soluzioni *degeneri*.

Immediatamente dopo si definiscono le 3 funzioni e le 9 derivate parziali mentre successivamente si passa all'algoritmo che esegue l'inversione della matrice di Jacobi. Il prodotto matriciale tra l'inverso della matrice $\vec{W}$ e la funzione $\vec{F}$ viene memorizzato nei vettori P(1), P(2) e P(3) ed il calcolo delle 3 incognite eseguito tramite l'uso della formula ricorsiva. Il controllo dell'iterazione viene effettuato fino al raggiungimento dell'approssimazione desiderata $1{\cdot}10^{-6}$ di tutt'e tre le incognite. Dopo di che vengono visualizzati i risultati finali.

```
'  ----- Determinazione di LONG.,LATIT. e ANOMALIA         ------
'  ----- tramite misure di angoli azimutali e la soluz. di ------
'  ----- un sistema di 3 equaz. NON LINEARI in 3 incognite ------
 DEFDBL A-Z
 ' ------------- 3 Terne dei DATI del problema ----------
    L1 = 150.210355#:  S1 = -38.913290#:   D1 = -11.185833#
    L2 = 180.308440#:  S2 = -14.878290#:   D2 = 14.545555#
    L3 = 223.495977#:  S3 = 20.492543#:    D3 = -8.679444#
 '--------------------------------------------------------
         RAD = ATN(1) * 4 / 180: pi = 180 * RAD
   L1 = L1 * RAD: S1 = S1 * RAD: T1 = TAN(D1 * RAD)
   L2 = L2 * RAD: S2 = S2 * RAD: T2 = TAN(D2 * RAD)
   L3 = L3 * RAD: S3 = S3 * RAD: T3 = TAN(D3 * RAD)
    ' ------------------------------------------------
        LA = 10:  FI = 50: EPS = 0:  ' Valori iniziali
        LA = LA * RAD: FI = FI * RAD: EPS = EPS * RAD
    ' ------------------------------------------------
     COLOR 14, 1: CLS
```

```
     NP = 3: 'nro incognite
 DEF FNF1 (LA,FI,EPS)= SIN(LA+S1)-TAN(EPS+L1)*(COS(LA+S1)* SIN(FI)- T1* COS(FI))
 DEF FNF2 (LA,FI,EPS)= SIN(LA+S2)-TAN(EPS+L2)*(COS(LA+S2)* SIN(FI)- T2* COS(FI))
 DEF FNF3 (LA,FI,EPS)= SIN(LA+S3)-TAN(EPS+L3)*(COS(LA+S3)* SIN(FI)- T3* COS(FI))
'======================================
 DEF FNF11 (LA,FI,EPS)= COS(LA+S1)+ TAN(EPS+L1)* SIN(LA+S1)* SIN(FI)
 DEF FNF21 (LA,FI,EPS)= COS(LA+S2)+ TAN(EPS+L2)* SIN(LA+S2)* SIN(FI)
 DEF FNF31 (LA,FI,EPS)= COS(LA+S3)+ TAN(EPS+L3)* SIN(LA+S3)* SIN(FI)

 DEF FNF12 (LA,FI,EPS)= -TAN(EPS+L1)*(COS(LA+S1)* COS(FI)+ T1* SIN(FI))
 DEF FNF22 (LA,FI,EPS)= -TAN(EPS+L2)*(COS(LA+S2)* COS(FI)+ T2* SIN(FI))
 DEF FNF32 (LA,FI,EPS)= -TAN(EPS+L3)*(COS(LA+S3)* COS(FI)+ T3* SIN(FI))

 DEF FNF13 (LA,FI,EPS)= (T1* COS(FI)- COS(LA+S1)* SIN(FI))* (1+ (TAN(EPS+L1))^2)
 DEF FNF23 (LA,FI,EPS)= (T2* COS(FI)- COS(LA+S2)* SIN(FI))* (1+ (TAN(EPS+L2))^2)
 DEF FNF33 (LA,FI,EPS)= (T3* COS(FI)- COS(LA+S3)* SIN(FI))* (1+ (TAN(EPS+L3))^2)

' Inizio ciclo iterativo
  DO
' ======================================
   F(1)= FNF1(LA,FI,EPS): F(2)= FNF2(LA,FI,EPS): F(3)= FNF3(LA,FI,EPS)

   W(1,1) = FNF11(LA,FI,EPS): W(1,2) = FNF12(LA,FI,EPS): W(1,3) = FNF13(LA,FI,EPS)
   W(2,1) = FNF21(LA,FI,EPS): W(2,2) = FNF22(LA,FI,EPS): W(2,3) = FNF23(LA,FI,EPS)
   W(3,1) = FNF31(LA,FI,EPS): W(3,2) = FNF32(LA,FI,EPS): W(3,3) = FNF33(LA,FI,EPS)
' ---- Inversione matrice  W ---------
    FOR K = 1 TO NP
         FOR J = 1 TO NP
          IF J <> K THEN W(K, J) = W(K, J) / W(K, K)
         NEXT J
       FOR I = 1 TO NP
          IF I = K THEN 510
         FOR J = 1 TO NP
          IF J = K THEN 500
                  W(I, J) = W(I, J) - W(K, J) * W(I, K)
500      NEXT J
510     NEXT I
       FOR I = 1 TO NP
         IF I <> K THEN W(I, K) = -W(I, K) / W(K, K)
       NEXT I
       W(K, K) = 1 / W(K, K)
    NEXT K
' ---- Fine inversione matrice  W -----------------------
    P(1) = W(1, 1) * F(1) + W(1, 2) * F(2) + W(1, 3) * F(3)
    P(2) = W(2, 1) * F(1) + W(2, 2) * F(2) + W(2, 3) * F(3)
    P(3) = W(3, 1) * F(1) + W(3, 2) * F(2) + W(3, 3) * F(3)

   LA1= LA-P(1): FI1= FI-P(2): EPS1= EPS-P(3): ' valori i-esimi incognite

   LA = LA1:  FI = FI1:  EPS = EPS1: 'rinomina incognite
```

```
  PRINT USING "   ###.######  ###.######  ###.####"; LA1/RAD; FI1/RAD; EPS1/RAD
  LOOP UNTIL ABS(P(1)) < .000001 AND ABS(P(2)) < .000001 AND
             ABS(P(3)) < .000001
'
  PRINT:PRINT USING "  Longit.(est) = ##.######   Latitud. = ##.######
                       Anomalia= ###.####"; LA1/RAD; FI1/RAD; EPS1/RAD
  END
```

# 4 Risultati

Le 3 terne dei DATI del problema sono quelli **teorici** ricavati con un planetario settato al 3-10-2004, ore 11:00 TMEC, e con l'opzione di ascensione retta e declinazione riferite all'equinozio della data. L'osservatore si trova a $\lambda = 15°$, $\phi = 37°$ mentre le stelle virtualmente collimate sono Spica, Denebola e Alphard.

L'output del programma è il seguente:

```
15.381947     34.495655     -0.6274
15.030719     36.947315     -0.0137
15.000019     36.999974     -0.0000
15.000000     36.999999     -0.0000

Longit.(est) = 15.000000   Latitud. = 36.999999   Anomalia=  -0.0000

                Confronto con le Coordinate Geografiche VERE
                     (Lambda= 15.0000    Fi= 37.0000)

                         Lo scarto è di km:   0.000
```

Appunto perchè i dati introdotti sono teorici non c'è **nessuno scarto** tra le coordinate geografiche trovate e quelle reali. Ciò conferma la validità del metodo, che va ovviamente testato con *accurati* rilievi topografici.

*..... 19-10-2004 .....*