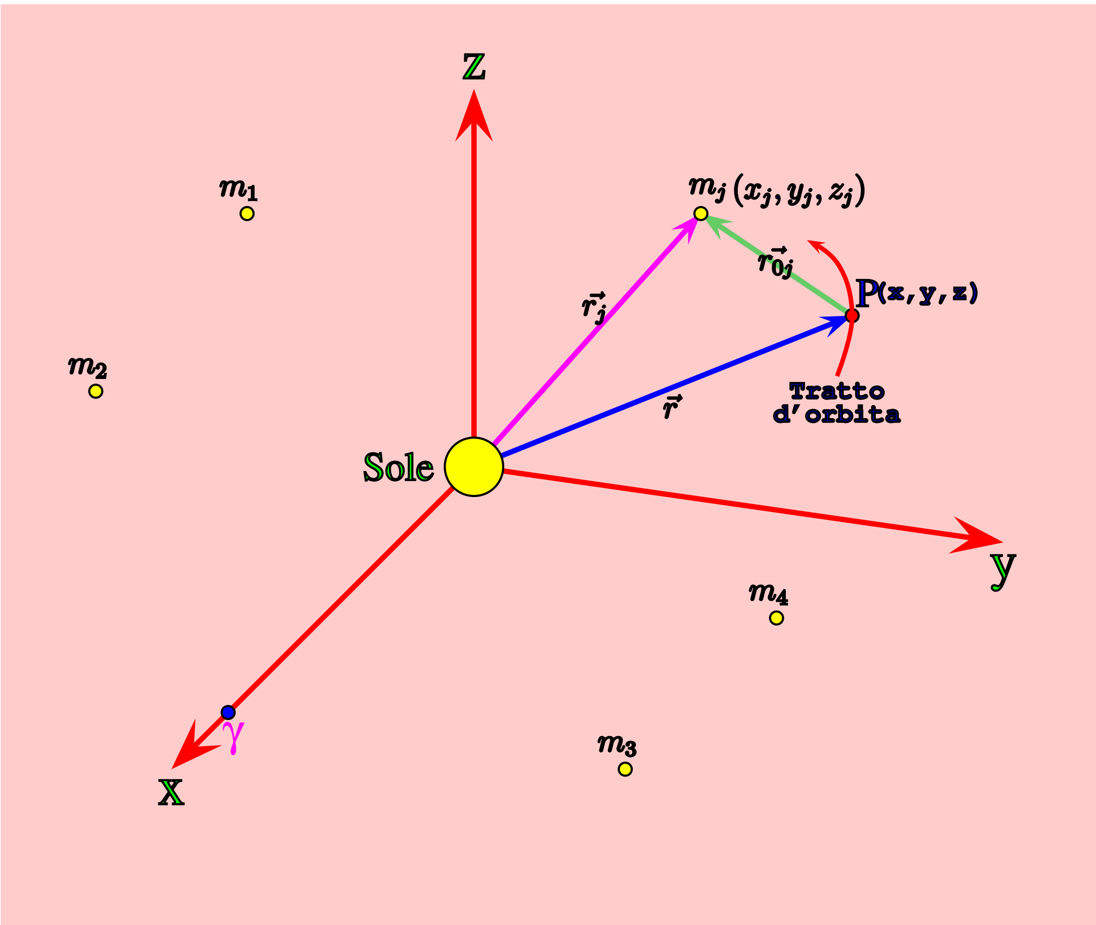
Moto Perturbato degli N-corpi
(Metodo di Cowell)
risolto con l'integratore di Everhart al 15° ordine

Giuseppe Matarazzo

Marzo 2004

Sommario

Il corpo in esame, di cui si vuol conoscere il moto, è sottoposto all'azione gravitazionale primaria del Sole e a quella di N-corpi perturbatori (masse planetarie). Il sistema di equazioni differenziali di 2° grado (metodo di Cowell) viene risolto mediante il potente integratore di E. Everhart che lo mise a punto nel 1974. Diversi esempi di *close-encounters* tra un asteroide e la Terra sono mostrati a corredo di questo lavoro.



1 Introduzione

Lo studio del moto imperturbato di un astro, il cosiddetto *Moto dei 2-Corpi* (pianeta di massa trascurabile rispetto a quella nota del Sole, intorno a cui esso gira), è stato risolto sin dai tempi di

Keplero, che ne formulò le celebri tre leggi fisiche. Successivamente la meccanica celeste è stata la *palestra* su cui si sono cimentati i grandi **geni** del passato Newton, Gauss, Lagrange e moltissimi altri per risolvere, tramite l'analisi matematica, il problema più generale: quello degli N-CORPI, cioè del moto di un corpo celeste *disturbato* dall'azione gravitazionale delle MASSE di altri N pianeti oltre che da quella primaria del Sole.

Con l'avvento dei Personal Computer ed il miglioramento delle loro prestazioni, dovuto alla strabiliante tecnologia dei Processori tipo Intel-Pentium, il calcolo completo delle effemeridi di un astro **non** può più essere confinato nei laboratori dei centri specializzati, ma **deve** diventare patrimonio dell'*astronomia amatoriale.*

2 Equazione differenziale del moto perturbato

Ne diamo la formulazione di Cowell, esposta agli inizi del XX secolo ma resa applicabile nell'era dei computer. Come si vede in figura, il sistema di riferimento è *rettangolare*, *eliocentrico* ed *eclittico.* Il corpo in esame P è definito dal vettore posizione $\vec{r}$, la generica massa perturbatrice m_j dal vettore $\vec{r_j}$, mentre le reciproche distanze tra il corpo e i pianeti perturbatori sono individuate dal vettore differenza $\vec{r}_{0j}$.

$$\vec{r}'' = -\mu \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} + G \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j \left[\frac{\vec{r_{0j}}}{r_{0j}^3} - \frac{\vec{r_j}}{r_j^3} \right]$$

essendo $\mu = GM$ il parametro gravitazionale del Sole ed m_j gli analoghi parametri dei pianeti perturbatori, espressi nella stessa unità di misura di μ. Scegliendo, per praticità, come unità delle lunghezze l'unità astronomica UA e per le velocità l'UA/giorno, il parametro gravitazionale del Sole, che è il prodotto tra la costante gravitazionale di Newton (G) e la massa del Sole (M), è pari a

$$\mu = k^2 = 2.959122082855910 \cdot 10^{-4} \quad UA^3/giorno^2$$

con k = costante di Gauss = 0.017 202 098 95. I parametri gravitazionali dei pianeti si calcolano in rapporto a μ conoscendo le loro masse reciproche, ovvero di quante volte esse sono più piccole rispetto alla massa solare. Eccone un'esauriente tabellina.

Pianeta	*Massa inversa*	*Param. Gravitaz.*(UA^3/g^2)
Mercurio	6 023 600.000	$0.166013679527193 \cdot 10^{-6}$
Venere	408 523.610	$0.244783893885595 \cdot 10^{-5}$
Terra	332 946.048	$0.300348962122949 \cdot 10^{-5}$
Marte	3 098 708.000	$0.322715144505387 \cdot 10^{-6}$
Giove	1 047.349	$0.954791938424322 \cdot 10^{-3}$
Saturno	3 497.898	$0.285885980666103 \cdot 10^{-3}$
Urano	22 902.980	$0.436624404335156 \cdot 10^{-4}$
Nettuno	19 412.240	$0.515138902053550 \cdot 10^{-4}$
Luna	27 068 709.153	$0.369430250390380 \cdot 10^{-7}$
Asteroide	*stima generica*	$1 \cdot 10^{-20}$
Terra + Luna	328 900.560	$0.304043264626853 \cdot 10^{-5}$

L'equazione del moto, in forma esplicita, diventa:

$$x'' = -\mu \cdot \frac{x}{r^3} + G \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j \left[\frac{x_j - x}{r_{0j}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right]$$

$$y'' = -\mu \cdot \frac{y}{r^3} + G \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j \left[\frac{y_j - y}{r_{0j}^3} - \frac{y_j}{r_j^3} \right]$$

$$z'' = -\mu \cdot \frac{z}{r^3} + G \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j \left[\frac{z_j - z}{r_{0j}^3} - \frac{z_j}{r_j^3} \right]$$

essendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la distanza eliocentrica del corpo perturbato, $r_{0j} = \sqrt{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2 + (z_j - z)^2}$ le distanze mutue tra pianeti perturbatori e corpo ed infine $r_j = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2}$ quelle eliocentriche dei pianeti.

3 Subroutine Force

Nel listato Fortran (COW.FOR) dell'integratore di Everhart, che descriveremo nel prossimo capitolo, le forze in gioco fra gli elementi massivi sono riportati in questa subroutine. Da notare che i 10 vettori posizione relativi ai 9 pianeti perturbatori e all'oggetto P in esame si susseguono in progressione da 1 a 3 per Mercurio, da 4 a 6 per Venere, fino a 28, 29, 30 per le coordinate del corpo.

```
      subroutine force (x,am,f,nb)
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension x(30),f(30),rh(10,10),am(10),r(10)
      DATA SCsole/0.295912208d-03/
c
c     La matrice R contiene le mutue distanze. Il numero dei corpi è NB.
c     Vengono calcolate le distanze mutue: R è l'inverso del cubo della
c     distanza reciproca.
c     CALCOLO delle DISTANZE RECIPROCHE + Dist.SOLE-Pianeti Perturb.
c
      do 2 n=1,nb
      j=(n-1)*3+1
          r(n)=dsqrt(x(j)**2+x(j+1)**2+x(j+2)**2)**3
          r(n)=1d0/r(n)
          if (n.eq.L) go to 2
      na=n+1
      do 1 L=na,nb
      k=(L-1)*3+1
      rh(n,L)=dsqrt((x(j  )-x(k  ))**2+
     *              (x(j+1)-x(k+1))**2+
     *              (x(j+2)-x(k+2))**2)**3
      rh(n,L)=1d0/rh(n,L)
    1 rh(L,n)=rh(n,L)
    2 continue
c
c     Vengono calcolate le componenti della forza su ogni oggetto.
c
      do 3 n=1,nb
```

```
      j=(n-1)*3+1
c
c     Forza sull'oggetto J
c
      SCM=(-SCsole-am(n))*r(n)
      f(j  )=SCM*x(j  )
      f(j+1)=SCM*x(j+1)
      f(j+2)=SCM*x(j+2)
c
c     Somma dei contributi di tutti gli oggetti L (diversi da N). La for-
c     mula della forza è: Fx=-mu*(x/d)/d^2, dove mu è il parametro gravi-
c     tazionale del corpo perturbante, (x/d) la componente della distanza
c     e 1/d^2 la legge dell'inverso delle distanze.
c     Formule simili per Fy e Fz.
c
      do 3 L=1,nb
      if (L.eq.n) go to 3
      k=(L-1)*3+1
      f(j  )=f(j  )+am(L)*((x(k  )-x(j  ))*rh(n,L)-x(k  )*r(L))
      f(j+1)=f(j+1)+am(L)*((x(k+1)-x(j+1))*rh(n,L)-x(k+1)*r(L))
      f(j+2)=f(j+2)+am(L)*((x(k+2)-x(j+2))*rh(n,L)-x(k+2)*r(L))
    3 continue
      return
      end
```

4 L'integratore di Everhart

E' stato elaborato dal prof. Edgar EVERHART dell'Università di Denver (Colorado) nel 1974 e divulgato in Italia dai fisici A.CARUSI e G.B.VALSECCHI nel 1985, nell'ambito di uno studio sulla dinamica delle comete.

Il suo algoritmo, al 15° grado di precisione, è descritto nella memoria dell'autore: Edgar Everhart - *An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings*. Esso consente, con una versatilità straordinaria, di calcolare, ad ogni passo di integrazione *dt*, la posizione di TUTTI gli N-PIANETI Perturbatori e del Corpo in esame. Il passo *dt* può essere FISSO (per es. 10, 20, 50 giorni) oppure AUTOMATICO, in base ad un criterio di *affinamento* della precisione di calcolo inserito nell'algoritmo.

Il file Fortran COW.FOR, scaricabile dallo stesso sito che ospita questa memoria, è appositamente arricchito con tante note a margine (*remarks*) che consentono al lettore di seguire la procedura iterativa. I dati iniziali del *primo colpo di manovella* dell'integrazione numerica sono riportati nel file COW.DAT, e riguardano principalmente i vettori posizione e velocità delle masse perturbatrici e dell'astro esaminato, nonchè i rispettivi parametri gravitazionali, così come esposti più in alto.

Analizziamo in dettaglio il file COW.DAT. Da notare che l'epoca iniziale t_i, espressa in giorni giuliani (JD), non figura tra i dati che il programma legge in quanto inserita direttamente nel listato Fortran (ti= 2450400.5 = 1996 11 13.0).

Vediamo come si presenta il QUADRO dei dati nel file COW.DAT: dalla 4^a alla 13^a riga sono inserite, a tre a tre, le componenti eliocentriche eclittiche delle posizioni dei 10 Corpi (9 pianeti+astro) e dalla 14^a alla 23^a quelle delle loro velocità. I relativi parametri gravitazionali occupano, a tre a tre, le ultime righe del file (24-27). Riguardo alle prime 3 righe, precisiamo subito che il tempo iniziale di integrazione, come detto sopra, è introdotto come costante all'interno del listato, mentre il tempo finale occupa la prima riga del file dati. Questo può essere INFERIORE a quello iniziale (per evoluzioni a RITROSO nel tempo), l'algoritmo provvede automaticamente a cambiare il *senso di marcia*. Nella seconda si fissa il PASSO di integrazione, riportando il valore zero (0.0d0) se si vuole il passo variabile o il numero apposito per il passo fisso; la migliore integrazione è quella con passo automatico variabile, che diventa sempre più piccolo con l'aumentare dei numero dei pianeti perturbatori attivati, facendo quindi aumentare il tempo di elaborazione del computer. Infine nella terza riga una serie di *1* e *0* indica quali sono i pianeti perturbatori ATTIVATI (1) o INATTIVI (0). E' importante sottolineare, pena il blocco del programma, che l'ultimo numero riguardante l'astro DEVE essere SEMPRE *1*; se i rimanenti restano tutti zero siamo in presenza del moto imperturbato. Con tutti *1* il moto del corpo è perturbato da tutti i corpi del sistema solare, che sono, ripetiamoli nell'ordine: MERCURIO -VENERE -TERRA -MARTE -GIOVE -SATURNO -URANO -NETTUNO -LUNA. Per non aumentare i tempi macchina del PC (anche se con il Pentium sono ridottissimi!!) la scelta dei PIANETI ATTIVI va fatta con oculatezza; non ha senso inserire, per es.Plutone di massa inferiore a quella della Luna e molto distante dal Sole, per il calcolo dell'effemeride di un asteroide Earth-Crossing; ha importanza invece per una cometa il cui moto può essere influenzato dal pianeta.

```
File COW.DAT
2479535.5d0            # => 2076 08 20.0            riga 1
0.0d0                  # Passo dt automatico        riga 2
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1   #                            riga 3
  -0.149159702    -0.440963036    -0.022327616
  -0.611989313     0.374491355     0.040441721
   0.623583443     0.768339909     0.000004793
  -0.867876224     1.387156065     0.050391907
   2.082090276    -4.715767037    -0.027109761
   9.431813779     0.925485832    -0.391130885
  11.029909922   -16.430868072    -0.203984923
  13.740611205   -26.844035430     0.236008714
   0.622910312     0.765946222     0.000210719
  -0.706047177     1.252231255     0.209593264     # (1620) Geographos - Pos.
   0.02099935602  -0.00761458747  -0.00254959770
  -0.01064020236  -0.01735242471   0.00037723787
  -0.01364628646   0.01077936450  -0.00000018385
  -0.01133319267  -0.00623331246   0.00014806143
   0.00680943438   0.00340341149  -0.00016658079
  -0.00084001900   0.00554562084  -0.00006310384
   0.00324306803   0.00201417203  -0.00003465596
   0.00278056980   0.00145288779  -0.00009392500
  -0.01305453889   0.01063212541   0.00001967580
  -0.00895288172  -0.00904604358  -0.00279732276   # (1620) Geographos - Vel.
  4.912547451450813D-11  7.243456209632767D-10  8.887693748703729D-10
  9.549528942224059D-11  2.825477019818496D-07  8.459468504448004D-08
  1.288816238177662D-08  1.532112500184277D-08  1.093189218169183D-11
  0.10000000000000D-19
```

```
--------------------------------------------------------------------------------
    COMMENTI:    Tempo di inizio integrazione 1996 11 13.0  -> JD=2450400.5
                 Vettori Posizione e Velocità
--------------------------------------------------------------------------------
     Riga 1  ->  JD del TEMPO FINALE di integrazione (tf)
     Riga 2  ->  XL = Passo di integrazione (=0 automatico)
     Riga 3  ->  Stringa Corpi ATTIVI Pianeti Perturbanti (1) - NON ATTIVI (0)
                 In ordine:
                         1) MERCURIO
                         2) VENERE
                         3) TERRA
                         4) MARTE
                         5) GIOVE
                         6) SATURNO
                         7) URANO
                         8) NETTUNO
                         9) LUNA
            {13^,23^}   10) CORPO IN ESAME
Righe  4-13  ->  X0 Vettori POSIZIONE 10 CORPI (9+il Corpo in esame) [UA]
Righe 14-23  ->  V0 Vettori VELOCITA' 10 CORPI (9+il Corpo in esame) [UA/g]
Righe 24-27  -> AM0 Parametri gravitazionali dei 10 CORPI [UA^3/g]
--------------------------------------------------------------------------------
```

5 Esempi applicativi. Evoluzione dell'asteroide Geographos in un intervallo di 300 anni

L'astronomo belga *Edwin* **Goffin** ha calcolato 15 avvicinamenti alla Terra a partire dal 1808 fino al 2076; tali *close-encounters* sono stati pubblicati sulla rivista italiana Nuovo Orione nell'aprile del 1994, qualche mese prima del più piccolo di questi 'near-earth approaches'.

Nella tabellina seguente c'è un quadro riepilogativo delle *distanze geocentriche* di 1620-Geographos, ottenute con il programma COW.FOR, e di quelle calcolate da Goffin. Per ricavare di volta in volta tutti i risultati, basta cambiare il valore di t_f di fine integrazione della prima riga del file dati.

```
---------------------------------------------
     15 Avvicinamenti Terra-(1620)Geographos
           calcolati da Edwin Goffin
          (fonte Nuovo Orione: Apr.94)
---------------------------------------------
       tf= tempo di fine integrazione
       (1^ riga file cow.dat: unico input)
```

	tf (JD)	dgeoc.	Data Civile	E.Goffin
1)	2381491.0	0.088 368	=> 14.5/3/1808	0.088 4
2)	2385673.3	0.068 537	=> 26.8/8/1819	0.069 1
3)	2397353.0	0.096 226	=> 18.5/8/1851	0.095 0
4)	2402308.3	0.081 317	=> 12.8/3/1865	0.081 2
5)	2406488.5	0.036 523	=> 22.0/8/1876	0.036 5
6)	2411439.8	0.080 311	=> 13.3/3/1890	0.080 3
7)	2415620.0	0.033 937	=> 23.5/8/1901	0.033 9
8)	2420571.0	0.081 611	=> 14.5/3/1915	0.081 6
9)	2424748.5	0.066 504	=> 21.0/8/1926	0.066 5
10)	2440460.5	0.060 613	=> 27.0/8/1969	0.060 6
11)	2445409.5	0.089 503	=> 16.0/3/1983	0.089 5
12)	2449589.917	0.033 305	25.417/8/1994	0.033 3
13)	2470407.3	0.048 064	=> 23.8/8/2051	0.048 0
14)	2475357.8	0.096 675	=> 13.3/3/2065	0.096 6
15)	2479535.5	0.078 397	=> 20.0/8/2076	0.078 1

6 Conclusione

La grande versatilità del metodo di integrazione numerica di Everhart non è solo dimostrata dalla bontà dei risultati ottenuti, ma dalla sua continua e diffusa applicazione da parte degli astronomi professionisti di tutto il mondo.