

Coordinate Dirette e Inverse (metodo di Borkowski) di un punto P in un sistema di riferimento Geocentrico

Giuseppe Matarazzo

Dicembre 2005

Sommario

Scopo di questo lavoro è quello di rivisitare, con l'ausilio di figure ben dettagliate, gli algoritmi che permettono la conversione tra le coordinate geodetiche e geocentriche di un punto rispetto all'ellissoide terrestre.

Il procedimento *diretto*, dalle coordinate geodetiche (ϕ, h) a quelle rettangolari geocentriche (r, z) non presenta eccessive difficoltà.

Invece l'*inverso*, ovvero il passaggio dalle coordinate (r, z) geocentriche a quelle geografiche (ϕ, h) viene generalmente risolto per successive approssimazioni. Qui si è scelta l'elegante soluzione algebrica del radioastronomo polacco Kazimierz Borkowski ¹.

1 Introduzione

In un sistema di riferimento *non-inerziale*, com'è quello terrestre, con la forma della Terra approssimata ad un *ellissoide di rotazione*, non serve stabilire la longitudine (λ) del punto P, in quanto questa dipende dal Tempo Siderale (T_{sid}), funzione dell'istante considerato. E' importante invece conoscere la proiezione del raggio vettore OP sul *piano equatoriale* terrestre, che chiamiamo r e vale: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e la quota z di P, anch'essa riferita all'equatore della Terra.

Quindi definiamo **trasformazione diretta** quella che ci permette di determinare (r, z) a partire dalla *latitudine geodetica* (o geografica) ϕ del punto considerato e dalla sua *altezza* h sulla retta normale all'ellissoide e **inversa** la trasformazione contraria, da (r, z) a (ϕ, h) .

Quest'ultima presenta maggiori difficoltà nel formalismo matematico, visto che si opera con equazioni di tipo trascendente. E difatti molti autori hanno optato per una soluzione *iterativa*, che converge rapidamente a partire da un valore iniziale che bisogna scegliere con ocularità. Con l'algoritmo di Borkowski, proposto in questa memoria, si ha una **soluzione esatta** del problema. Le radici immaginarie dell'equazione di *quarto grado* nella variabile ausiliaria t possono essere scartate facilmente e il calcolo di ϕ porta a determinare conseguentemente l'altra incognita h .

Nell'esempio riportato più avanti viene preso come riferimento l'ellissoide GRS80, avente il semiasse maggiore $a = 6378.137$ km e l'inverso dell'appiattimento terrestre $\frac{1}{f} = \frac{a}{a-b} = 298.25722210$, per cui $b=6356.752$ km.

¹Kazimierz M. Borkowski: **Transformation of Geocentric to Geodetic Coordinates without approximations** - 1987 - Torun Radio Astronomy Observatory (Poland)

Con riferimento alla figura (1), calcoliamo innanzitutto le due distanze \overline{VS} e \overline{QS} che la normale in S all'ellisse meridiana intercetta sui due assi coordinati (r, z) . La prima distanza $N = \overline{VS}$ rappresenta anche il raggio di curvatura del primo verticale ed è differente dal raggio di curvatura in S della sezione meridiana che è quella rappresentata in figura.

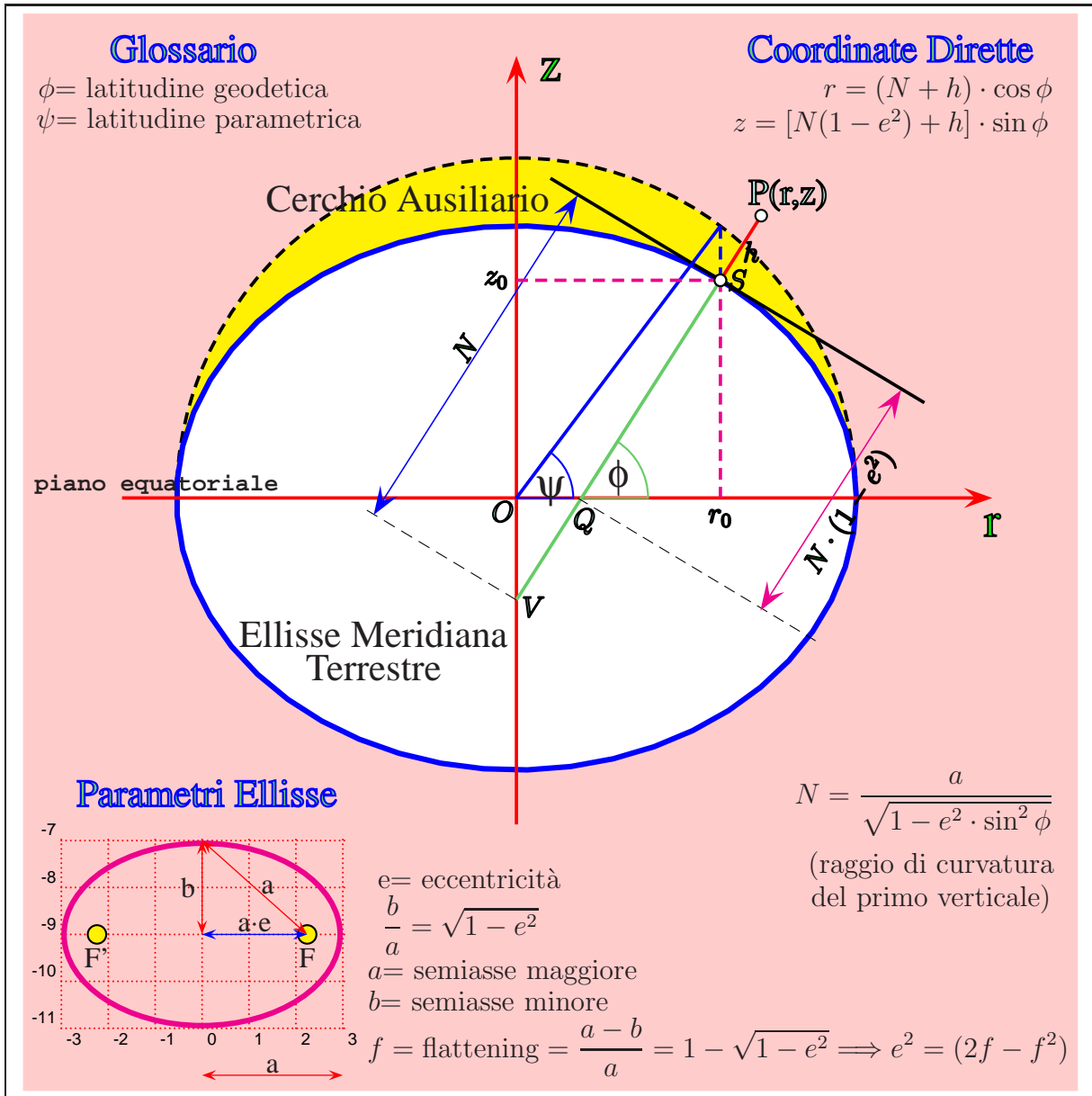


Figura 1: Coordinate Dirette: da (ϕ, h) a (r, z)

Dette (r_0, z_0) le coordinate di S, l'equazione della retta **verticale** passante per S è:

$$z - z_0 = \tan \phi \cdot (r - r_0) \quad (1)$$

e la sua intersezione con gli assi z e r determina le coordinate dei punti V e Q, che sono:

$$V = [0; (z_0 - \tan \phi \cdot r_0)] \quad Q = \left[\left(r_0 - \frac{z_0}{\tan \phi} \right); 0 \right] \quad (2)$$

pertanto:

$$\begin{cases} r = (VS + h) \cdot \cos \phi \\ z = (QS + h) \cdot \sin \phi \end{cases} \quad (3)$$

La posizione del punto S è individuata dalle *coordinate parametriche* dell'ellisse, che sono scritte in funzione dell'angolo ψ , detto appunto *latitudine parametrica* o "ridotta":

$$r_0 = a \cdot \cos \psi \quad z_0 = b \cdot \sin \psi \quad (4)$$

essendo (a,b) i semiassi maggiore e minore dell'ellisse.

Sostituendo le (4) nelle (2), possiamo determinare i quadrati delle due distanze $N^2 = \overline{VS}^2$ e $T^2 = \overline{QS}^2$ conoscendo le coordinate dei tre punti. Otteniamo:

$$N^2 = r_0^2 \cdot (1 + \tan^2 \phi) \quad T^2 = z_0^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \phi}\right) \quad (5)$$

2.1 Proprietà dell'ellisse

Vediamo adesso che esiste una relazione semplice che lega gli angoli ψ e ϕ della figura (1). Il coefficiente angolare della retta *tangente* all'ellisse in S è dato, in termini differenziali, dall'espressione: $m = \frac{dz_0}{dr_0}$, mentre quello della *normale* è pari a $\tan \phi$ e, applicando le (4), vale:

$$m' = -\frac{1}{m} = \tan \phi = -\frac{dr_0}{dz_0} = \frac{a \sin \psi \cdot d\psi}{b \cos \psi \cdot d\psi} = \frac{a}{b} \cdot \tan \psi$$

E ricordando la relazione tra i semiassi dell'ellisse e la sua eccentricità (figura [1] in basso a sinistra) otteniamo:

$$\tan \phi = \frac{a}{b} \cdot \tan \psi = \frac{\tan \psi}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (6)$$

2.2 Calcolo di N e T

Riprendendo la prima espressione delle (5) e la prima delle (4), abbiamo:

$$N^2 = \frac{a^2 \cdot \cos^2 \psi}{\cos^2 \phi} = \frac{a^2}{\frac{\cos^2 \phi}{\cos^2 \psi}} = \frac{a^2}{\cos^2 \phi \cdot (1 + \tan^2 \psi)}$$

e quindi, applicando la (6), si ottiene

$$N^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \phi + \frac{b^2}{a^2} \cdot \sin^2 \phi} = \frac{a^2}{1 - \sin^2 \phi + (1 - e^2) \cdot \sin^2 \phi} = \frac{a^2}{1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi}$$

ovvero:

$$\boxed{N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi}}} \quad (7)$$

Usiamo ora lo stesso procedimento per T^2 e, saltando alcuni facili passaggi algebrici, arriviamo a:

$$T^2 = \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{a^2}{\cos^2 \phi + \frac{b^2}{a^2} \cdot \sin^2 \phi} = \frac{b^4}{a^4} \cdot N^2 = (1 - e^2)^2 \cdot N^2$$

$$T = (1 - e^2) \cdot N \quad (8)$$

2.3 Coordinate Geocentriche di P

Possiamo allora completare le equazioni (3) e scrivere le **coordinate dirette** cercate:

$$\begin{cases} r = (N + h) \cdot \cos \phi \\ z = [N \cdot (1 - e^2) + h] \cdot \sin \phi \end{cases} \quad (9)$$

con N calcolato mediante l'espressione (7).

3 Coordinate Inverse

Cominciamo la nostra trattazione partendo dalle formule scritte alla fine del paragrafo precedente, le (9). Dal sistema delle due equazioni eliminiamo la variabile h ed otteniamo l'espressione:

$$r - \frac{z}{\tan \phi} = N \cdot e^2 \cdot \cos \phi \quad (10)$$

Manipolando il secondo membro, in cui si sostituisce il valore di N della (7), otteniamo:

$$N \cdot e^2 \cdot \cos \phi = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 - b^2 \cdot \tan^2 \phi}}$$

per cui la (10) diventa:

$$r = \frac{z}{\tan \phi} + \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 - b^2 \cdot \tan^2 \phi}} \quad (11)$$

Adesso utilizziamo un parametro *ausiliario* e poniamo:

$$\tan \phi = \frac{a(1 - t^2)}{2bt} \quad (12)$$

essendo $t = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)$.

Sostituiamo quindi la (12) nella (11) e otteniamo la seguente equazione algebrica di **4° grado**:

$$\boxed{t^4 + 2Et^3 + 2Ft - 1 = 0} \quad (13)$$

con

$$E = \frac{bz - (a^2 - b^2)}{ar} \quad F = \frac{bz + (a^2 - b^2)}{ar}$$

che ammette le seguenti *quattro* soluzioni, ricavabili dal doppio segno (\pm) di t e G :

$$t = \pm \sqrt{G^2 + \frac{F - vG}{2G - E}} - G \quad (14)$$

²Da: K. Borkowski, "Accurate Algorithms to transform Geocentric to Geodetic Coordinates" - 1989 - Bull.Geod.,**63**, pp. 50-56

$$G = \frac{\pm\sqrt{E^2 + v + E}}{2} \quad v = (\sqrt{D} - Q)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{D} + Q)^{\frac{1}{3}}$$

e inoltre:

$$D = P^3 + Q^2 \quad P = \frac{4}{3} \cdot (EF + 1) \quad Q = 2 \cdot (E^2 - F^2)$$

L'autore del metodo dimostra che il caso $D < 0$, che porta a radici *immaginarie*³, non ha alcun interesse pratico in quanto *involuppa* dei punti distanti circa 45 km dal centro O dell'ellissoide di riferimento.

Il caso $D > 0$ conduce a *due radici reali*, che si riducono a **una** se si considera, come è nella realtà, la latitudine ϕ che varia nell'intervallo $[-90^\circ, +90^\circ]$.

Possiamo pertanto riscrivere l'equazione (14), che ci dà l'unico valore del parametro t , eliminando i due doppi segni.

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{G^2 + \frac{F - vG}{2G - E}} - G \\ G = \frac{\sqrt{E^2 + v} + E}{2} \\ v = (\sqrt{D} - Q)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{D} + Q)^{\frac{1}{3}} \\ D = P^3 + Q^2 \\ P = \frac{4}{3} \cdot (EF + 1) \\ Q = 2 \cdot (E^2 - F^2) \end{array} \right. \quad (15)$$

Noto il valore di t , dalla (12) ricaviamo la prima incognita ϕ ed anche, dopo facili passaggi algebrici (che omettiamo), la seconda h . Eccole:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \arctan \left[\frac{a(1 - t^2)}{2bt} \right] \\ h = (r - at) \cos \phi + (z - b) \sin \phi \end{array} \right. \quad (16)$$

4 Listato Basic per le Coordinate Inverse

Il codice Basic presentato in questo paragrafo è stato tratto dalla subroutine GEOD di K. Burkowski⁴. L'esempio che viene mostrato all'interno del programma riguarda le coordinate geocentriche dell'antenna del Telescopio RT32 di Torun.

Listato Basic

DEFDBL A-Z

pi = 4 * ATN(1#): rad = pi / 180

DEF FNacos (X) = pi/2 - (2+(X<1 AND X>-1))*ATN(X/SQR(1+X*X*(X<1 AND X>-1)))

³ $v = 2\sqrt{-P} \cos[(1/3) \cdot \arccos(-Q/(-P)^{3/2})]$

⁴Sito Web: <http://www.astro.uni.torun.pl/~kb/Papers/geod/Geod-BG.htm>

```

' Costanti
-----
a = 6378.137#: ' Ellissoide GRS80: semiasse maggiore in metri
fr = 298.257222101#: ' inverso dell'appiattimento terrestre
-----
'
'-----
' Dati
r = 3838.27019#
z = 5077.03676#
-----
' Semiasse b
b = (a - a / fr) * SGN(z)

' Inizio Calcoli
'-----
E = ((z + b) * b / a - a) / r
F = ((z - b) * b / a + a) / r
,
' Soluzione dell'equazione: t**4 + 2*E*t**3 + 2*F*t - 1 = 0
,
P = (E * F + 1) * 4 / 3
Q = (E * E - F * F) * 2
D = P * P * P + Q * Q
IF D >= 0 THEN
s = SQR(D) + Q
s = EXP(LOG(ABS(s)) / 3) * SGN(s)
v = P / s - s
' Migliora l'accuratezza del valore numerico (v)
v = -(Q + Q + v * v * v) / (3 * P)
,
ELSE
v = 2 * SQR(-P) * FNacos(FNacos(Q / P / SQR(-P)) / 3)
END IF
G = .5 * (E + SQR(E * E + v))
t = SQR(G * G + (F - v * G) / (G + G - E)) - G
fi = ATN((1 - t * t) * a / (2 * b * t))
h = (r - a * t) * COS(fi) + (z - b) * SIN(fi)

PRINT "          Risultati":
PRINT USING "  Latitudine GEODETICA (fi)= ###.##### gradi"; fi/rad
PRINT USING "  Quota sulla Verticale (h)= #####.##### km"; h
END
-----

```

,
Proiez. equator. r [km]: 3838.27019
Quota geocentrica di P z [km]: 5077.03676

Risultati

Latitudine GEODETICA (fi)= 53.0954618 gradi
Quota sulla Verticale (h)= 0.13361 km
,

5 Conclusione

Questo breve excursus può essere utile a molti appassionati di *astrodinamica* che si occupano di satelliti artificiali terrestri o di orbite meteoritiche. Il passaggio da coordinate geocentriche a geodetiche è molto frequente e l'uso di metodi iterativi può, in alcune situazioni, non essere particolarmente agevole, in quanto condizionati, come dicevamo prima, dal valore iniziale di prima approssimazione.

Ciò non succede con il *metodo esatto* descritto in questo lavoro.

..... *Fine 23-12-2005*