Calcolo degli Elementi Orbitali di un Corpo Celeste, noti i vettori posizione ($\vec{r}_1, \vec{r}_2$) e l'angolo β tra la direzione del moto in P_1 e $\vec{r}_1$

Giuseppe Matarazzo

Maggio 2005

Sommario

Una *conica nello spazio* è completamente definita quando sono noti due vettori posizione e il tempo di percorrenza dell'arco da essi delimitato (problema di Lambert) oppure quando sono conosciuti tre vettori posizione (problema di Gibbs).
Obiettivo di questo lavoro è trovare la soluzione di un'orbita conoscendo due vettori posizione e la direzione del moto nel primo punto, ovvero la *direzione* della velocità V_1. Un esempio applicativo chiude la breve memoria tecnica.

Dati del Problema

Con riferimento alla figura (1) analizziamo i dati del nostro problema. Il vettore $\vec{r}_1$ è conosciuto e le sue componenti, rispetto ad un sistema di riferimento (x, y, z) centrato nella massa gravitazionale, sono (x_1, y_1, z_1). Il secondo vettore posizione della conica incognita $\vec{r}_2$ è anch'esso noto e le sue componenti valgono (x_2, y_2, z_2). Ultima grandezza data è l'angolo β tra i vettori posizione e velocità nel punto P_1.

Vogliamo calcolare gli **elementi orbitali** della traiettoria conica di un corpo celeste che la percorre, vale a dire i *parametri di forma* (p, e, θ_1) e quelli di *giacitura* (o euleriani) (i, Ω, ω).

Ricordiamo che il parametro p ha l'espressione universale $p = a \cdot (1 - e^2)$, per cui quando l'eccentricità e è maggiore di 1 (traiettoria iperbolica) risulta, per convenzione, negativo il valore a del semiasse maggiore.

Calcolo dei 3 parametri di forma: p, e, θ_1

Stabiliamo innanzitutto quali sono le incognite da calcolare, in modo da definire la forma della conica e di quanto essa è ruotata rispetto ad un asse orbitale di riferimento.

Esse sono l'anomalia θ_1 del primo raggio vettore rispetto al *pericentro*, l'eccentricità e e il parametro p della conica, da cui poi si deduce, con la formula scritta sopra, il semiasse maggiore a.

Ci servono quindi **tre equazioni**.

Analizziamo la *prima*. Il momento angolare **h** è così definito, in forma scalare:

$$h = V_1 \cdot (r_1 \cdot \sin\beta) = V_1 \cdot b = \sqrt{\mu p}$$

essendo b una grandezza nota, in quanto prodotto di due valori fissati, il modulo del vettore $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ e il seno dell'angolo (β), che è un dato del problema. Anche il raggio vettore $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ è noto e lo utilizzeremo dopo.

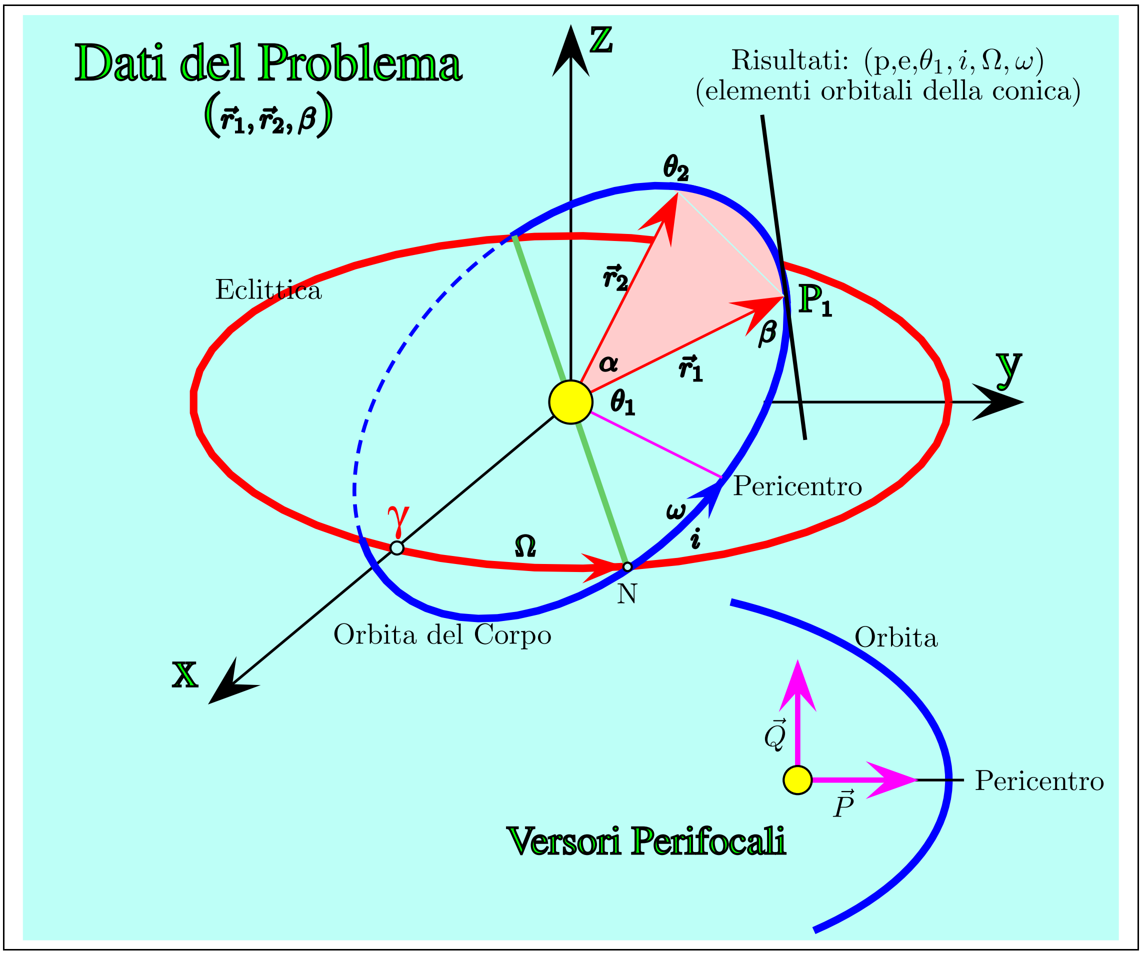

Figura 1: Orbita Conica nello Spazio (non necessariamente ellittica)

Elevando al quadrato l'equazione scritta sopra, ricaviamo:

$$V_1^2 = \frac{\mu p}{b^2}$$

Sappiamo pure che la stessa velocità, in un moto centrale, viene calcolata con l'espressione

$$V_1^2 = \frac{\mu}{p} \cdot (1 + 2e\cos\theta_1 + e^2)$$

E quindi, dal loro confronto, otteniamo la nostra *prima* equazione, questa:

$$\boxed{1 + 2e\cos\theta_1 + e^2 = \tfrac{p^2}{b^2}}$$

La *seconda* equazione, riferita al primo raggio vettore, si ricava dalla nota relazione

$$\boxed{r_1 = \tfrac{p}{1+e\cos\theta_1}}$$

La *terza* è analoga alla seconda, e vale:

$$\boxed{r_2 = \tfrac{p}{1+e\cos(\theta_1+\alpha)}}$$

In quest'ultima occorre sviluppare il coseno:

$$e\cdot\cos(\theta_1+\alpha) = e\cdot K_2\cos\theta_1 - e\cdot K_1\sin\theta_1 \qquad \textit{essendo noti}: \quad K_1 = \sin\alpha \quad K_2 = \cos\alpha$$

Riscriviamo allora le tre incognite ponendo:

$$x = e \cdot \cos\theta_1 \qquad y = e^2 \qquad z = p$$

La grandezza $e \cdot \sin\theta_1$ varrà $\sqrt{y - x^2}$ e le tre equazioni possono essere così scritte, dopo aver posto $K_0 = \frac{1}{b^2}$:

$$\begin{cases} 1 + 2x + y = & K_0 \cdot z^2 \\ z = & r_1 \cdot (1 + x) \\ z = & r_2 \cdot (1 + K_2 x - K_1 \sqrt{y - x^2}) \end{cases}$$

Eliminando z, si ottiene:

$$\begin{cases} 1 + 2x + y = & K_0 r_1^2 \cdot (1 + x)^2 \\ r_1 \cdot (1 + x) = & r_2 \cdot (1 + K_2 x - K_1 \sqrt{y - x^2}) \end{cases}$$

E quindi, estraendo y dalla prima e sostituendola nella seconda, si ricava, dopo alcuni passaggi, la seguente equazione:

$$\frac{1 + K_2 x - K_1 \sqrt{K_0 r_1^2 (1 + x)^2 - (1 + x)^2}}{1 + x} = \frac{r_1}{r_2}$$

Portando fuori radice $(1 + x)$, semplificando e ponendo $K_4 = K_1 \sqrt{K_0 \ r_1^2 - 1} + \frac{r1}{r2}$, arriviamo a:

$$\frac{1 + K_2 x}{1 + x} = K_4 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1 - K_4}{K_4 - K_2}$$

E poi, a scalare, otteniamo le altre due incognite:

$$z = r_1 \cdot (1 + x) \qquad y = K_0 r_1^2 \cdot (1 + x)^2 - 2x - 1$$

Quindi i **tre elementi** orbitali che determinano la forma della curva sono:

$$\boxed{p = z \qquad e = \sqrt{y} \qquad \theta_1 = \arccos(x/e)}$$

Calcolo dei 3 parametri di giacitura: i, Ω, ω

Passiamo adesso al calcolo degli altri elementi orbitali della conica, ossia ai *parametri euleriani* (i, Ω, ω) che fissano la curva nello spazio: inclinazione orbitale, longitudine del nodo e argomento del pericentro.

Per far ciò ricorriamo all'ausilio dei **versori perifocali** (P, Q) del piano orbitale, il cui orientamento è mostrato in figura (1).

Poichè noi conosciamo i vettori posizione r_1 e r_2, in quanto sono i dati del problema, per calcolare (P, Q) basta risolvere *vettorialmente* il seguente sistema (2x2):

$$\begin{cases} r_1 \cos\theta_1 \cdot \vec{P} + r_1 \sin\theta_1 \cdot \vec{Q} = & \vec{r_1} \\ r_2 \cos\theta_2 \cdot \vec{P} + r_2 \sin\theta_2 \cdot \vec{Q} = & \vec{r_2} \end{cases}$$

essendo noto anche $\theta_2 = \theta_1 + \alpha$. Chiamando con (a_1, b_1) i coefficienti della prima equazione e con (a_2, b_2) quelli della seconda, il sistema diventa:

$$\begin{cases} a_1 \cdot \vec{P} + b_1 \cdot \vec{Q} = & \vec{r_1} \\ a_2 \cdot \vec{P} + b_2 \cdot \vec{Q} = & \vec{r_2} \end{cases}$$

Effettuiamo la soluzione di questo sistema lineare con il metodo di Cramer, denominando con D il determinante dei coefficienti $\boxed{D = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}$. Le incognite saranno così determinate:

$$\vec{P} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{r_1} & b_1 \\ \vec{r_2} & b_2 \end{vmatrix}}{D} \qquad \vec{Q} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \vec{r_1} \\ a_2 & \vec{r_2} \end{vmatrix}}{D}$$

E in forma esplicita avremo:

$$P_x = \frac{x_1 b_2 - x_2 b_1}{D} \qquad P_y = \frac{y_1 b_2 - y_2 b_1}{D} \qquad P_z = \frac{z_1 b_2 - z_2 b_1}{D}$$

$$Q_x = \frac{b_1 x_2 - b_2 x_1}{D} \qquad Q_y = \frac{b_1 y_2 - b_2 y_1}{D} \qquad Q_z = \frac{b_1 z_2 - b_2 z_1}{D}$$

A questo punto, tramite le note formule della meccanica celeste, calcoliamo i tre angoli di giacitura della conica.

Argomento del pericentro:

$$\omega = \arctan\left(\frac{P_z}{Q_z}\right)$$

Longitudine del nodo:

$$\Omega = \arctan\left(\frac{P_y \cos\omega - Q_y \sin\omega}{P_x \cos\omega - Q_x \sin\omega}\right)$$

Inclinazione:

$$i = \arctan\left(\frac{\frac{P_z}{\sin\omega}}{\frac{-(P_x \sin\omega + Q_x \cos\omega)}{\sin\Omega}}\right)$$

Listato Basic per risolvere un esempio applicativo

I dati sono inseriti all'interno del programma.

```
  COLOR 14, 1: CLS
  DEFDBL A-Z
  pi = 4 * ATN(1#): rad = pi / 180
DEF FNatan (y,x)=(1+(x=0))*ATN(y/(x+(x=0)))-pi*(x<=0)-
          2*pi*(x>0 AND y<0)+(x=0)*SGN(y)*pi/2
DEF FNacos (x)=pi/2-(2+(x<1 AND x>-1))*ATN(x/SQR(1+x*x*(x<1 AND x>-1)))
'-----------------------------------------------------------------------
' Costanti
  kgauss = .01720209895#
  mu = 1
'------------ Dati del Problema --------------------------
  x1 = -.106418#:  y1 = .137154#:  z1 = 1.637343#
  x2 = -2.60002887#:  y2 = 1.62023766#:  z2 = 2.21048897#
  be = 63.54333316#: ' angolo beta in gradi
' ---------- Fine input Dati -----------------------------
' Calcolo dei moduli dei 2 vettori
  r1 = SQR(x1 ^ 2 + y1 ^ 2 + z1 ^ 2)
  r2 = SQR(x2 ^ 2 + y2 ^ 2 + z2 ^ 2)

' Calcolo dell'angolo (alfa) tra i due vettori (r1) e (r2)
  cosalfa = (x1 * x2 + y1 * y2 + z1 * z2) / (r1 * r2)
  alfa = FNacos(cosalfa)
```

```
' Costanti
  K2 = cosalfa: K1 = SQR(1 - K2 ^ 2)
  B = r1 * SIN(be * rad)
  K0 = 1 / B ^ 2
  K4 = r1 / r2 + K1 * SQR(K0 * r1 ^ 2 - 1)
'
'  Calcolo di x=e*COS(te1), y=e^2, z=p
  x = (1 - K4) / (K4 - K2)
  y = K0 * r1 ^ 2 * (1 + x) ^ 2 - 2 * x - 1: e = SQR(y)
  z = r1 * (1 + x): p = z

 te1 = FNacos(x / e): 'Anomalia del raggio vettore V1 (in RAD)
 te2 = te1 + alfa: 'Anomalia del raggio vettore V2 (in RAD)

 a = p / (1 - e ^ 2): ' Semiasse maggiore

 IF a < 0 THEN wo$ = " ORBITA IPERBOLICA " ELSE
 IF a > 0 THEN wo$ = " ORBITA  ELLITTICA "

 COLOR 14, 3
 LOCATE 16, 29: PRINT wo$
 COLOR 14, 1
'
 LOCATE 17, 5: PRINT USING " Parametro  p= ##.########"; p
 LOCATE 18, 5: PRINT USING " Eccentric. e= ##.########"; e
 LOCATE 19, 5: PRINT USING " Semias.mag a=+##.########"; a
'
 LOCATE 17, 45: PRINT USING " Ang.r1-r2 (à)= ###.######ø"; alfa / rad
 LOCATE 18, 45: PRINT USING " Anomalia (é1)= ###.######ø"; te1 / rad
 LOCATE 19, 45: PRINT USING " Anomalia (é2)= ###.######ø"; te2 / rad
 LOCATE 20, 45: PRINT USING " Rag.Vett.(r1)= ##.########"; r1
 LOCATE 21, 45: PRINT USING " Rag.Vett.(r2)= ##.########"; r2

 ' Calcolo dei Versori Perifocali P=(Px,Py,Pz) e Q=(Qx,Qy,Qz)

 a1 = r1 * COS(te1): b1 = r1 * SIN(te1)
 a2 = r2 * COS(te2): b2 = r2 * SIN(te2)
'
 Det = a1 * b2 - b1 * a2
'
 Px = (x1 * b2 - x2 * b1) / Det
 Py = (y1 * b2 - y2 * b1) / Det
 Pz = (z1 * b2 - z2 * b1) / Det
'
 Qx = (a1 * x2 - a2 * x1) / Det
 Qy = (a1 * y2 - a2 * y1) / Det
 Qz = (a1 * z2 - a2 * z1) / Det

'
 V1 = SQR(mu * (1 + 2 * e * COS(te1) + e ^ 2) / p)
 V2 = SQR(mu * (1 + 2 * e * COS(te2) + e ^ 2) / p)
'
```

```
' Calcolo degli elementi orbitali (i,O,w)
' --------------------------------------
 om = FNatan(Pz, Qz)
'
 num1 = Py * COS(om) - Qy * SIN(om)
 den1 = Px * COS(om) - Qx * SIN(om)
 nodo = FNatan(num1, den1)
'
 num2 = Pz / SIN(om)
 den2 = -(Px * SIN(om) + Qx * COS(om)) / SIN(nodo)

 incl = FNatan(num2, den2)

' PRINT om / rad
' PRINT nodo / rad
' PRINT incl / rad

 LOCATE 20, 5: PRINT USING " Inclinaz.(i)= ###.######ø"; incl / rad
 LOCATE 21, 5: PRINT USING " Long.Nodo(ê)= ###.######ø"; nodo / rad
 LOCATE 22, 5: PRINT USING " Arg.Peri.(w)= ###.######ø"; om / rad
'
 LOCATE 22, 45: PRINT USING " Velocita'(V1)= ##.########"; V1
 LOCATE 23, 45: PRINT USING " Velocita'(V2)= ##.########"; V2

END
```

Risultati dell'esempio

```
                         ORBITA IPERBOLICA
 Parametro  p=  3.79238832          Ang.r1-r2 (alfa)=  48.541513°
 Eccentric. e=  1.73559551          Anomalia   (te1)=  41.330785°
 Semias.mag a= -1.88461157          Anomalia   (te2)=  89.872298°
 Inclinaz.(i)=  87.735641°             Rag.Vett.(r1)=  1.64652000
 Long.Nodo(O)= 329.705343°             Rag.Vett.(r2)=  3.77777470
 Arg.Peri.(w)=  54.283221°             Velocita'(V1)=  1.32109667
                                       Velocita'(V2)=  1.02957541
```

.... fine: 08-05-2005