Trasferimento orbitale

Giuseppe Matarazzo

Aprile 2005

Sommario

Questo è un problema tipico della meccanica celeste moderna. Il cambiamento d'orbita satellitare terrestre avviene da un'orbita circolare ad un'altra di raggio maggiore, con possibilità che l'orbita di arrivo sia inclinata di un angolo γ rispetto alla precedente.
Viene analizzato come esempio, e brevemente commentato, un esercizio assegnato in una facoltà di ingegneria aerospaziale italiana.

1 Analisi del problema

Nella figura (1) viene preso in esame il moto di un satellite che si muove in un'*orbita circolare* di raggio r_1 intorno alla Terra. La posizione iniziale considerata è quella avente anomalia $-\beta$ dall'asse y, che per ipotesi coincide con la linea dei nodi dell'orbita di arrivo, anch'essa circolare, di raggio r_2 ed inclinata dell'angolo γ rispetto a quella iniziale.

La prima manovra di accensione dei motori (impulso V_1') avviene dopo che la sonda ha percorso il tratto d'orbita (0-1). In 1 inizia il trasferimento orbitale della sonda che si muove nello stesso *piano equatoriale* (xy) lungo il tratto (1-2) di una conica di *minima energia*, detta **ellisse di Hohmann**. Il suo *angolo di trasferimento* è di 180° con distanze al perigeo e all'apogeo pari rispettivamente a r_1 e r_2.

Arrivata nel punto 2, la sonda subisce con l'impulso V_2' una vigorosa *sterzata* per inserirsi nell'orbita (blu) definitiva.

Verranno calcolati pertanto questi due cambiamenti di velocità, che traggono energia dai combustili interni del veicolo, e il tempo totale di percorrenza dell'orbita (0-2).

2 Calcoli

In un moto circolare uniforme attorno alla Terra la *velocità tangenziale* è *costante* e vale: $V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$, essendo μ il *parametro orbitale* della Terra, pari a $398\,600\ km^3/s^2$, ed r il raggio espresso in km.

Nel caso dell'esempio riportato appresso avremo quindi, per $r_1 = 8\,000\,km$, $V_{1c} = 7.059$ km/s, mentre per $r_1 = 12\,000\,km$, $V_{2c} = 5.763$ km/s.

Adesso, con riferimento alla figura (2), valutiamo a quanto ammontano le velocità al perigeo V_1 e all'apogeo V_2 dell'orbita di trasferimento della sonda. Con semplici valutazioni geometriche il semiasse maggiore dell'ellisse (di Hohmann) è presto calcolato: $a = \frac{r_1+r_2}{2} = 10\,000\,km$, ed allora

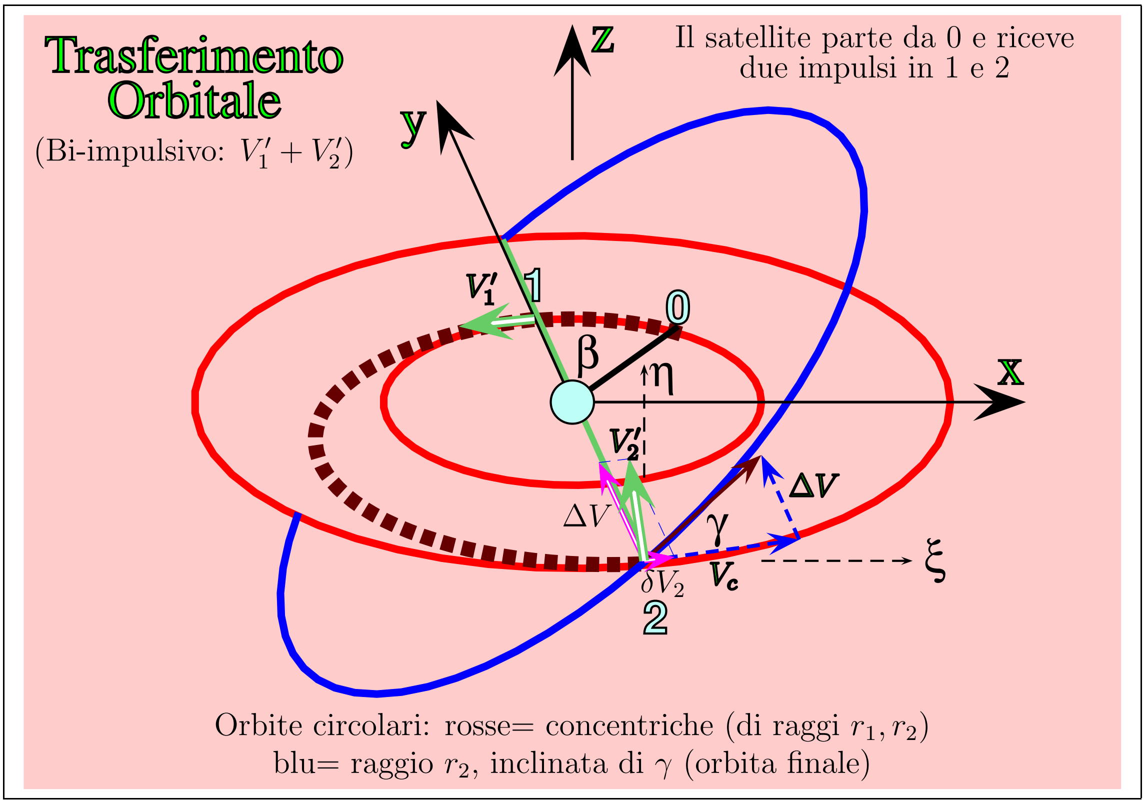


Figura 1: Moto Orbitale

possiamo applicare la formula della *conservazione dell'energia meccanica* in un moto centrale ed ottenere:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a}} = \; 7.732\, km/s \qquad\qquad V_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_2} - \frac{\mu}{a}} = \; 5.155\, km/s$$

Quindi il **primo impulso**, ovvero la velocità *relativa* della sonda rispetto all'orbita di partenza, è la differenza algebrica mostrata sotto. Teniamo presente che, quando queste manovre si svolgono nei punti particolari di periasse e apoasse, tutti i vettori velocità giacciono nello stesso asse.

$$\delta V_1 = \; V_1' = \; (V_1 \; - \; V_{1c}) = \; (7.732 - 7.059) = \; 0.673\, km/s$$

Tempi di percorenza. Nell'esempio l'angolo β è 45°, ossia $\frac{\pi}{4}$ radianti, quindi il tempo necessario per passare dalla posizione 0 alla 1 vale:

$$t_{01} = \sqrt{\frac{r_1^3}{\mu}} \cdot \frac{\pi}{4} = 890 \; sec$$

Il tempo di percorrenza del tratto ellittico è:

$$t_{02} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \cdot \pi = 4976 \; sec$$

Complessivamente l'intero tragitto (0-2) viene effettuato in 5866 *sec*, ovvero in 97.77 minuti.

Valutiamo adesso la spinta ulteriore da dare alla sonda nel punto 2 affinchè raggiunga la velocità V_{2c}. La variazione di velocità, che avviene nella stessa direzione tangente ad ellisse e cerchio nell'apogeo, è:

$$\delta V_2 = \; (V_{2c} \; - V_2) = \; (5.763 - 5.155) = \; 0.608\, km/s$$

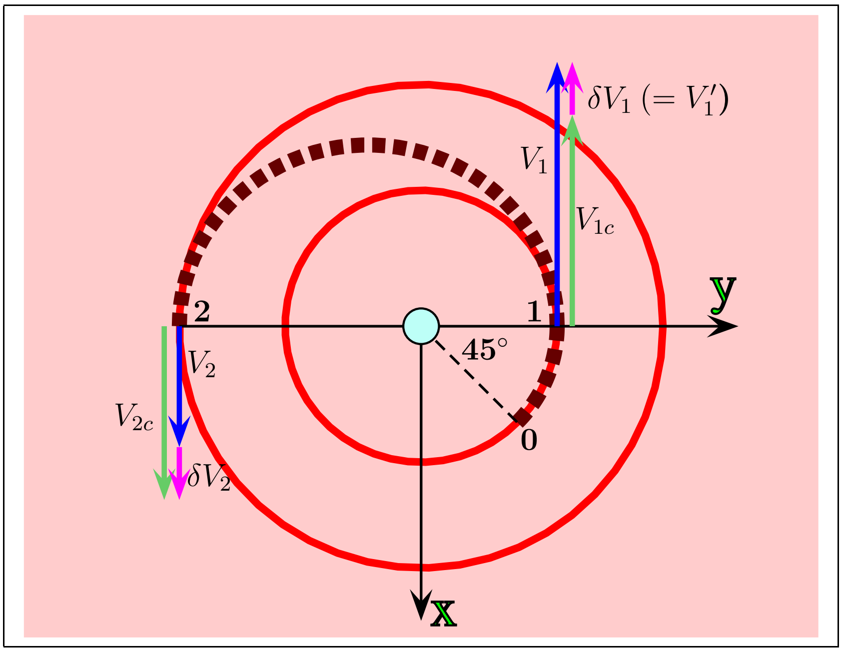


Figura 2: Ellisse di Hohmann

Ma a questa bisogna aggiungere, *vettorialmente*, la velocità ΔV che serve per spostare il satellite nell'orbita finale, inclinata dell'angolo γ rispetto al piano equatoriale, come mostrato nella figura (1). Per calcolarla basta conoscere la velocità circolare V_{2c} (in verde) con $\gamma = 60°$ ed applicare la formula:

$$\Delta V = \ 2 \cdot V_{2c}\ \cdot \sin(\gamma/2) = \ 5.763\ km/s$$

La composizione dei due vettori velocità $\vec{\Delta V}$ e $\delta\vec{V_2}$, rappresentate in viola in (1), avviene nel piano perpendicolare al raggio vettore (2-Terra) e la risultante $\vec{V_2'}$ equivale al **secondo impulso** da dare alla sonda per immettersi nell'orbita finale.

La via più semplice per calcolare sia il modulo dell'impulso $\vec{V_2'}$ che la sua direzione (angolo ψ rispetto al piano equatoriale), è quella vettoriale. Consideriamo un sistema di coordinate (ξ, η) di centro il punto 2, con ξ diretto secondo la direzione di $\delta\vec{V_2}$ e η ad esso normale, come in fig. (1).

Le componenti di $\delta\vec{V_2}$ saranno allora (0.608; 0.000), mentre quelle di $\vec{\Delta V}$, ruotata di 120° rispetto a ξ, varranno (-2.882; 4.991); quindi le componenti della velocità $\vec{V_2'}$, somma delle due, saranno ($\xi_R = -2.274$; $\eta_R = 4.991$) e pertanto :

$$|\vec{V_2}'| = \ \sqrt{\xi_R^2 + \eta_R^2} = \ 5.484\, km/s \qquad \psi = \ \arctan\left(\frac{\eta_R}{\xi_R}\right) \ = \ 114°.495$$

L'**energia totale**, necessaria per realizzare l'intera manovra, è allora la somma dei due impulsi (0.673+5.484)= 6.157 km/s.

Queste cifre indicano in modo palese come una “sterzata” di un angolo abbastanza ampio (60°) sia eccessiva in termini di spesa energetica (circa il 90% sul totale) e pertanto tali manovre sono *sconsigliabili* nella pratica.

3 Esercizio

E' stato assegnato all'Università "La Sapienza" di Roma presso la Facoltà di Ingegneria Aerospaziale.

Nella figura (3) è riportato il testo dell'esercizio da svolgere e nella successiva (4) la soluzione proposta; qui, *inspiegabilmente*, il solutore ha dato una versione solo **descrittiva** dell'esercizio e ciò è un *non-senso* in una facoltà di ingegneria!

Va da sé, comunque, che anche il testo del problema non aiuta affatto il compito dell'allievo, in quanto lo 'disorienta' ricordandogli di applicare alcune componenti dei vettori posizione e velocità e soprattutto la complessa matrice euleriana (3x3), di orientamento orbitale, che è decisamente *fuorviante*. Come ho dimostrato sopra.

fine

MECCANICA DEL VOLO SPAZIALE

Appello del 12 Dicembre 2003

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Prof. Chiara Valente

2. Un satellite si trova nelle seguenti condizioni iniziali: $\vec{\mathbf{R}}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} R_1 \left(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right)$, $\vec{\mathbf{V}}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} v_c \left(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right)$ con $R_1 = 8000km$ e $v_c = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}}$. Si vuole trasferire il satellite su di una orbita circolare con raggio $R_2 = 12000km$ ed inclinazione $i = \frac{\pi}{3}$. La longitudine del nodo ascendente Ω di questa orbita obiettivo sia $\frac{\pi}{2}$. Si progetti un trasferimento bi-impulsivo calcolandone il ΔV ed il ΔT a partire dall'istante iniziale.

Ricordiamo che:

$$\hat{\mathbf{r}} = A \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ b \sin E \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{v}} = A \begin{bmatrix} \frac{-an \sin E}{1 - e\cos E} \\ \frac{bn \cos E}{1 - e \cos E} \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

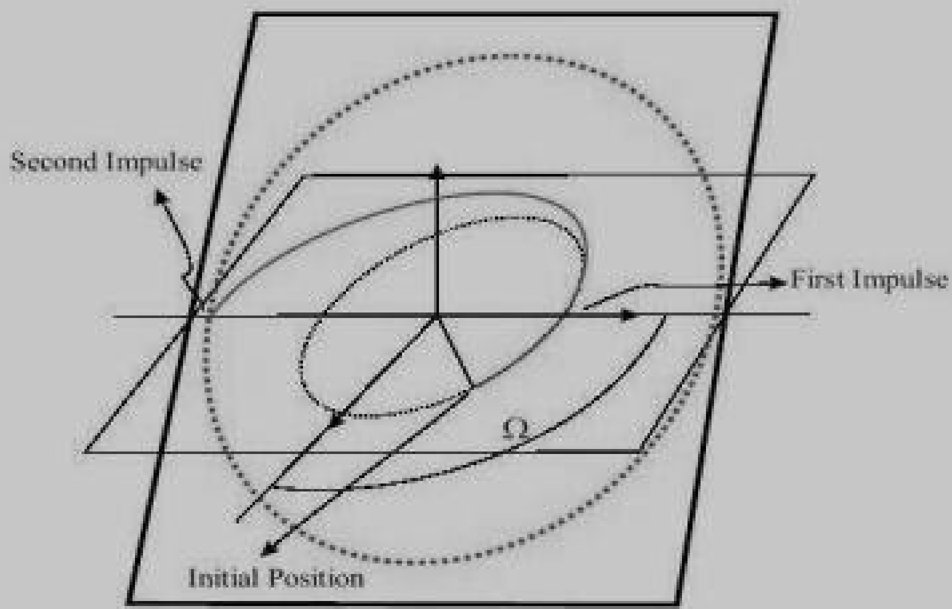
$$\begin{aligned}
l_1 &= \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i \\
l_2 &= -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i \\
l_3 &= \sin\Omega\sin i \\
m_1 &= \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i \\
m_2 &= -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i \\
m_3 &= -\cos\Omega\sin i \\
n_1 &= \sin\omega\sin i \\
n_2 &= \cos\omega\sin i \\
n_3 &= \cos i
\end{aligned}$$

$$\mu_{Terra} = 398601 \frac{km^3}{sec^2}$$

Figura 3: Testo del Compito

SOLUZIONE

2. E'chiaro che poiché $\vec{\mathbf{R}}_0 \cdot \vec{\mathbf{V}}_0 = 0$ e la velocitá del satellite é quella circolare, esso si troverá a percorrere un'orbita circolare di raggio $R_1 = 8000km$. L'inclinazione di tale orbita sará inoltre nulla avendo il momento della quantitá di moto direzione dell'asse z. Il trasferimento tra quest'orbita ed una orbita circolare inclinata e di raggio maggiore puó avvenire bi-impulsivamente se (vedi figura) il primo impulso viene dato quando il satellite si trova sulla linea dei nodi dell'orbita obiettivo. In questo caso il trasferimento avverrá grazie ad una orbita alla Hohmann il cui secondo impulso peró dovrá non solo circolarizzare l'orbita, ma anche cambiarne l'inclinazione. Il tempo necessario per il trasferimento sará allora la somma del semi periodo dell'ellisse di Hohmann e del tempo necessario al satellite per raggiungere la posizione del primo sparo.



- Primo Sparo (ΔV_1): Sará la differenza tra la velocitá al perigeo dell'orbita di trasferimento e la velocitá circolare v_c.
- Secondo Sparo (ΔV_2): Sará il modulo della differenza vettoriale tra la velocitá all'apogeo dell'orbita di trasferimento e la velocitá circolare sull'orbita obiettivo.
- Tempo di trasferimento (ΔT): Sará la somma del semi periodo dell'orbita di trasferimento e del tempo necessario al satellite per percorrere un angolo di $\frac{\pi}{4}$ sull'orbita di partenza.

Figura 4: Soluzione del Compito