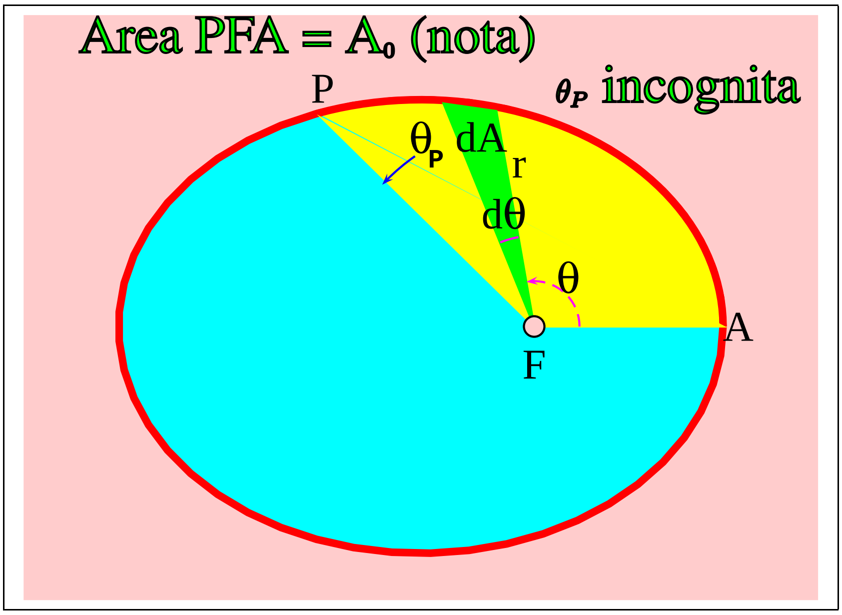
Angolo sotteso da un Settore Ellittico di Area nota

Giuseppe Matarazzo

Febbraio 2005

Sommario

Questa breve memoria è un puro *divertissement* matematico. Ha una certa attinenza con il calcolo astronomico e in particolare con la *seconda legge* di Keplero, la cui applicazione presuppone però la conoscenza del tempo di percorrenza dell'arco considerato.



1 Teoria

Si utilizza l'equazione polare dell'ellisse, con l'origine posta in uno dei due fuochi (*pericentro*) e l'*anomalia* θ crescente in senso antiorario.

E' nota l'area $\mathbf{A}_0$ del settore (AFP), dobbiamo cercare di determinare l'ampiezza dell'anomalia θ_P.

L'elemento infinitesimo dA, riportato in figura, vale:

$$dA = \frac{r^2 d\theta}{2} \tag{1}$$

Sostituendo nella (1) l'espressione dell'equazione *polare* dell'ellisse

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cdot \cos\theta}$$

ed integrando, otteniamo:

$$A = \int_0^\theta \frac{r^2 d\theta}{2} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + e \cdot \cos\theta)^2} \tag{2}$$

essendo (a) il semiasse maggiore della conica ed (e) la sua eccentricità; grandezze che sono entrambe note.

Se inponiamo che A sia uguale ad A_0 (dato del problema), l'angolo θ ottenuto con il calcolo sarà l'anomalia (AFP)=θ_P cercata.

Per facilitare l'esposizione, consideriamo che l'area data A_0 sia una frazione (η) di *metà ellisse*, con $0 < \eta < 1$; avremo:

$$A_0 = \frac{\eta}{2} \cdot A_{tot} = \frac{\eta}{2} \cdot \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$$

Sostituendo questa espressione nella (2) otteniamo:

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + e \cdot \cos\theta)^2} = \eta\pi(1-e^2)^{-\frac{3}{2}} = K_0 \tag{3}$$

per cui la funzione da annullare sarà:

$$F(\theta) = \int \frac{d\theta}{(1 + e \cdot \cos\theta)^2} - K_0 = G(\theta) - K_0 \tag{4}$$

La (4) è un'equazione **trascendente** e si risolve per successive approssimazioni usando il *metodo iterativo* di Newton, che è il seguente:

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \frac{F(\theta)}{F'(\theta)} \tag{5}$$

Il procedimento ripetitivo si blocca quando $|\theta_{i+1} - \theta_i| < \epsilon$, dove ϵ è una tolleranza fissata a-priori, che indica la precisione di calcolo che si vuole ottenere (per es. $1 \cdot 10^{-8}$ radianti).

1.1 Calcolo di $G(\theta) = \int \frac{d\theta}{(1+e\cdot\cos\theta)^2}$

Nella soluzione di questo integrale facciamo riferimento al manuale [1] che utilizza un metodo razionalmente più valido rispetto a quanto si può ricavare da [2], che mostra:

```
Integrale da risolvere:
INT(1/(1+0.5*COS(x))^2,x)  'Esempio con e=0.5
Risultato:
-108120/35113*ATAN(SIN(x)/(COS(x)+1))+108120/35113*ATAN(29681/51409*SIN(x)/
(COS(x)+1))-400000/105339*10^(-5)*(COS(x)*(35113*SIN(x)-1.21635*10^5*x)+
40545*x*SIN(x)^2+35113*SIN(x)-1.21635*10^5*x)/(3*COS(x)-SIN(x)^2+3)
```

Preso atto che non conviene applicare il metodo [2], seguiamo il procedimento descritto in [1].

L'integrale $G(x)$ è del tipo $\int \frac{dx}{(b+c\cdot\cos x)^2}$, con $b^2 > c^2$ essendo sempre $1 > e^2$, in quanto la conica è, come nel nostro caso, un'ellisse.

La sua primitiva è la seguente:

$$G(\theta) = \frac{1}{1-e^2}\int \frac{d\theta}{(1+e\cdot\cos\theta)} - \frac{e\cdot\sin\theta}{(1-e^2)(1+e\cdot\cos\theta)} \tag{6}$$

Detto $J(\theta)$ l'integrale che appare nella (6), ne determiniamo la primitiva, avendo considerato la stessa ipotesi precedente ($1 > e^2$).

$$J(\theta) = \int \frac{d\theta}{(1+e\cdot\cos\theta)} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\left[2\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot\tan\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{7}$$

Nella parte entro le parentesi quadre riconosciamo una grandezza nota in astronomia, ossia l'*anomalia eccentrica* E. Riepilogando, la (4) diventa:

$$F(\theta) = \frac{2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cdot\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\cdot\sin\theta}{(1-e^2)(1+e\cdot\cos\theta)} - K_0 \tag{8}$$

La derivata prima di $F(\theta)$ è immediata:

$$F'(\theta) = G'(\theta) = \frac{1}{(1+e\cdot\cos\theta)^2}$$

in quanto è la funzione integranda di $G(\theta)$.

2 Applicazione

Utilizziamo il listato Basic seguente. Il lettore può verificare che, assegnando all'eccentricità un valore *nullo* (orbita circolare), l'ampiezza dell'arco è direttamente proporzionale all'area data. Con $e = 0$ e $\eta = 0.5$ si ottiene $\theta_P = 90°$.

```
'Soluzione di un'EQUAZIONE trascendente F(x)=0 per Succ.approx. NEWTON
'applicata al calcolo dell'anomalia di un settore ellittico nota l'area
'^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^
COLOR 14, 1: CLS: DEFDBL A-Z
pi = 4 * ATN(1): rad = pi / 180
DEF fnc (x)= 2/(1-e^2)^(1.5)*ATN(SQR((1-e)/(1+e))*TAN(x/2))-
             e*SIN(x)/(1-e^2)/(1+e*COS(x)) - K0: 'Funzione
DEF fnc1 (x)= 1 / (1 + e * COS(x)) ^ 2: 'Derivata prima
'-------------------
 e = .2:  'eccentricita'
 eta = .35: ' frazione di mezza ellisse (0 < eta < 1)
 K0 = pi * eta * (1 - e ^ 2) ^ (-1.5)
'-------------------
' Ciclo iterativo
x = 1:       'Valore iniziale (in radianti)
'             (da modificare se F(x) diverge; varia da 0 a pi)
 DO
variaz = -fnc(x) / fnc1(x)
   kount = kount + 1
   x = x + variaz
   PRINT kount, x, variaz
LOOP UNTIL ABS(variaz) < .00000001#
 PRINT : PRINT USING "  x= ##.####### rad =  ###.####ø"; x; x / rad
END
```

Riferimenti bibliografici

[1] I.N.Bronstein, K.A.Semendiaev
"Aide-mémoire de Mathématiques"- Editions Eyrolles, Paris - 1979, p.560

[2] DERIVE - A Mathematical Assistant
Pacchetto di programmi matematici computerizzati - vers.DOS 2.08 - 1990

3 Calcolo Diretto del Settore Ellittico

In questa breve appendice riepiloghiamo la formula *diretta* per la determinazione dell'**area del settore ellittico**.

Manipolando algebricamente la (2) e la (8) nella quale non viene considerato il termine (-K_0), otteniamo:

$$A(\theta) = a^2\sqrt{1-e^2} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{a^2(1-e^2)}{2} \cdot \frac{e \cdot \sin\theta}{1+e \cdot \cos\theta} \quad (9)$$